ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 14 Dezember 1934 Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Das Problem der Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche.

Von *Hans Widenbauer* in München.

Übersicht. Es werden die Oberflächenwellen unter gewissen Einschränkungen der Variablen r und t berechnet und diskutiert, welche entstehen, wenn ein kreiszylindrischer Stein in Tiefwasser geworfen wird. Ausgegangen wird von den üblichen Gleichungen der Hydrodynamik und mittels des Fourierschen Integraltheorems eine einmalige Störung (diskontinuierliche Anfangsform) zur Zeit $t=0$ dargestellt (§ 1). Die Integrationen (§ 2) werden unter den eingangs erwähnten Einschränkungen von r und t nach einer exakteren Methode („Sattelpunktmethode") bewerkstelligt, als es bisher bei ähnlichen Wellenproblemen geschah. In § 3 A wird die Oberflächenform einer auf einen Punkt konzentrierten Störung, in § 3 B die Oberflächenform bei endlichem Radius der Störung diskutiert.

§ 1. Ableitung der Gleichungen der Ringwellen.

Das Problem, um welches es sich handelt, ist folgendes:

Eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit von einer bestimmten Tiefe, welche anfänglich in Ruhe ist, wird durch eine Ursache irgendwelcher Art an einer Stelle in Bewegung gesetzt. Es treten Wellen auf, die konzentrisch nach außen laufen. Diese Erscheinung ist uns aus dem täglichen Leben ganz vertraut; sie entsteht, wenn wir etwa einen Stein in eine Wasserfläche werfen. Gefragt ist nun nach der Oberfläche an einer bestimmten Stelle, bzw. zu einer bestimmten Zeit.

Ohne sich allzu weit von der Wirklichkeit zu entfernen, kann man in der mathematischen Behandlung des Problems weitgehende Vereinfachungen treffen. Eine Reibung der Flüssigkeit kommt nicht in Betracht; als äußere Kraft ist nur die Schwere vorhanden; die Flüssigkeit ist wirbellos, weil anfänglich in Ruhe; ferner werden wir sie als inkompressibel annehmen. Es existiert daher ein Geschwindigkeitspotential φ, welches der Gleichung

$$\Delta \varphi = 0$$

genügt.

Zur mathematischen Behandlung des Problems legen wir ein Zylinderkoordinatensystem (r, α, y) zugrunde. Die Störungsstelle denken wir uns im Ursprung; die ungestörte Wasseroberfläche werde durch die (r, α)-Ebene gebildet; die positive y-Achse gehe senkrecht nach oben.

Die zu lösende Differentialgleichung des Problems ist

$$\Delta \varphi = 0.$$

Die Grenzbedingungen sind folgende:

Ist h die Wassertiefe, so muß in der Tiefe $y = -h$ die Normalgeschwindigkeit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

sein.

Die Gleichung der Wasseroberfläche werde im folgenden mit $y = \eta$ bezeichnet. Dann haben wir als weitere Grenzbedingung, daß der Druck an der Oberfläche $y = \eta$ verschwinden muß. Dies liefert aus den Eulerschen Gleichungen unter Beschränkung auf kleine Erhebungen η die bekannte Bedingung

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{y=0} = g\eta .$$

Ferner muß die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeitsteilchen in normaler Richtung fortschreiten, gleich der Normalkomponente der Geschwindigkeit der Oberfläche sein:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{y=0} .$$

Als Lösung des Problems erhält man bei Kreissymmetrie und periodischer Zeitabhängigkeit die stehende Zylinderwelle[1])

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \cos \omega t \cdot J_0(k r) \\ \varphi &= g \frac{\sin \omega t}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{Cos} k (y+h)}{\operatorname{Cos} k h} \cdot J_0(k r) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dabei ist die Frequenz ω mit der Wellenzahl k und der Wassertiefe h durch dieselbe „Dispersionsformel"

$$\omega^2 = g k \cdot \mathfrak{Tg}(k h)$$

verknüpft wie bei den ebenen Wasserwellen (2-dimensional).

Nun stellen wir die Gleichung der Ringwellen auf, welche bei einer einmaligen Störung der Wasseroberfläche entstehen. Wir denken uns zur Zeit $t = 0$ einen kreiszylindrisch begrenzten Stein in das Wasser geworfen. Dieser Anfangszustand wird mathematisch der Forderung entsprechen, daß zur Zeit $t = 0$ der Wasserspiegel in einem Kreis vom Radius d um das Stück C gesenkt sei (Abb. 1):

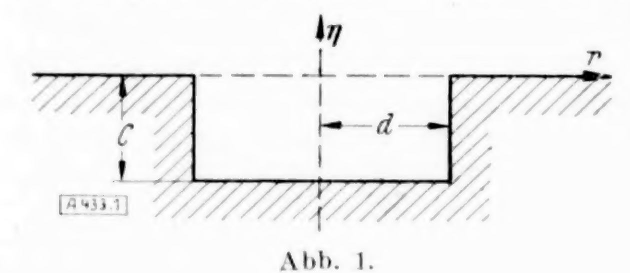


Abb. 1.

$$\eta = \begin{cases} -C & \text{für } r \leq d \\ 0 & \text{„ } r > d \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Um nun auf Grund dieser Anfangsbedingung die Gestalt der Oberfläche zu einer beliebigen Zeit zu erhalten, benützen wir die Fouriersche Integraldarstellung[2])

$$F(r) = \int_0^\infty k \cdot J_0(k r)\, d k \int_0^\infty a\, F(a)\, J_0(k a)\, d a .$$

In unserem Falle ist

$$\int_0^\infty a\, F(a)\, J_0(k a)\, d a = -C \int_0^d a\, J_0(k a)\, d a = -\frac{C d}{k} J_1(k d)\,^{3)} .$$

Damit erhalten wir aus (1)

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -C d \cdot \int_0^\infty J_1(k d) \cdot J_0(k r) \cos \omega t \cdot d k \\ \varphi &= -C g d \int_0^\infty J_1(k d)\, J_0(k r) \frac{\operatorname{Cos} k (y+h)}{\operatorname{Cos} k h} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d k \\ \omega^2 &= g k \cdot \mathfrak{Tg}(k h) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

1) Vgl. bei unendlicher Wassertiefe Lamb: Hydrodynamics, IV. Ed., p. 423.
2) Riemann-Weber: Part. Diffgl., VIII. Aufl., Bd. 1 (1930), S. 420.
3) Riemann-Weber: Part. Diffgl., VIII. Aufl., Bd. 1 (1930), S. 415.

Auf entsprechende Weise kann man verfahren, wenn an Stelle der Anfangserhebung für den Druck der Zustand (2) zur Zeit $t=0$ gefordert würde. Im Gegensatz zur früheren Lösung (3) würde sich die Oberfläche aus $\sin \omega t$-Gliedern, das Geschwindigkeitspotential aus $\cos \omega t$-Gliedern aufbauen. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen und uns auf den etwas anschaulicheren Fall einer Anfangsform der Oberfläche beschränken.

§ 2. Integration der Ringwellen bei Tiefwasser.

Im folgenden soll der Fall betrachtet werden, daß die Wassertiefe h groß gegen die Wellenlänge $\lambda\left(=\frac{2\pi}{k}\right)$ ist („Tiefwasser"). Die Dispersionsformel geht dann über in

$$\omega^2 = g k .$$

Die interessanteste Frage ist die nach der Gestalt der Oberfläche. Wir wollen daher nur die Integration der Oberfläche η durchführen, obwohl es mit den Methoden, welche wir bei der Auswertung des Integrals η anwenden werden, nicht schwierig wäre, auch das Potential φ zu integrieren.

Es handelt sich um folgendes Integral, wobei schon $\omega^2 = g k$ gesetzt wurde:

$$\eta = -C d \cdot \int_0^\infty J_1(k d) \,.\, J_0(k r) \cdot \cos \sqrt{g k}\, t \cdot d k .$$

Zur Auswertung schreiben wir zunächst nur die Besselsche Funktion 0ter Ordnung als Integral

$$J_0(k r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i k r \cos \alpha}\, d \alpha\ ^{4)} .$$

Da k später von 0 bis ∞ integriert werden muß, führen wir aus Konvergenzgründen den Integrationsweg in der α-Ebene so, daß $\Re\{i \cos \alpha\} < 0$, was auf dem Weg von 1 über 2 nach 3 in Abb. 2 der Fall ist.

Führen wir nun eine neue Integrationsvariable $n = \sqrt{k d}$ ein und setzen für $\cos \sqrt{g k}\, t$ $\Re\left\{e^{i \sqrt{g k}\, t}\right\}$, so erhalten wir

$$\eta = -\frac{2C}{\pi} \Re\left\{\int_1^3 d\alpha \cdot \int_0^\infty d n \cdot n J_1(n^2)\, e^{i \varrho (n^2 \cos \alpha + 2 \sigma n)}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

ϱ und σ sind dabei reine Zahlen mit der Bedeutung

$$\varrho = \frac{r}{d}, \qquad 2\sigma = \sqrt{\frac{g d \cdot t^2}{r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Zur Auswertung des Integrals benützen wir eine in der theoretischen Physik mehrfach gebrauchte Näherungsmethode, die „Sattelpunktmethode"[5]).

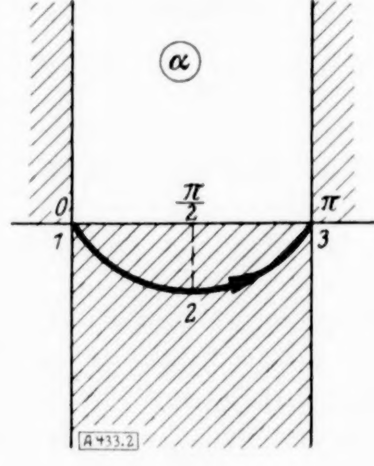


Abb. 2.

A. Integration nach n. Zunächst müssen wir das analytische Verhalten des Integranden in der komplexen n-Ebene betrachten.

Wir wollen das Gebiet suchen, wo

$$\Re\{i(n^2 \cos \alpha + 2\sigma n)\} < 0 .$$

Es sei

$$i(n^2 \cos \alpha + 2 \sigma n) = f(n),$$

$$n J_1(n^2) = F(n),$$

$$\cos \alpha = a e^{i\gamma}, \qquad a = |\cos \alpha| \neq 0, \qquad 0 \leq \gamma \leq \pi,$$

$$n = s e^{i\nu},$$

daher

$$f(n) = s\left(a s e^{i\left(2\nu + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)} + 2 \sigma e^{i\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

und

$$\eta = -\frac{2C}{\pi} \Re\left\{\int_1^3 d\alpha \int_0^\infty F(n)\, e^{\varrho f(n)}\, d n\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a).$$

[4]) Riemann-Weber: Part. Diffgl., VIII. Aufl., Bd. I (1930), S. 411.
[5]) Vgl. Riemann-Weber: Part. Diffgl., VIII. Aufl., Bd. 1 (1930), S. 444.

Die Grenzkurve, welche die Gebiete $\Re\{f(n)\} \gtrless 0$ trennt, ist gegeben durch $\Re\{f(n)\} = 0$ oder in Polarkoordinaten

$$s = -\frac{2\sigma \sin\gamma}{a \sin(2\nu + \gamma)}.$$

Das ist demnach eine Kurve, welche 2 Asymptoten besitzt, die mit der reellen Achse die Winkel $-\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\pi - \gamma}{2}$ einschließen. Nun ist aber $f(n)$ nur vom 2. Grade. Die Kurve $\Re\{f(n)\} = 0$ stellt daher eine Hyperbel, und zwar, da die Asymptoten aufeinander senkrecht stehen, eine gleichseitige, dar (I in Abb. 3 und 4). Der Mittelpunkt derselben ist

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{\sigma}{a} \cos\gamma \\[2ex] y_0 = +\dfrac{\sigma}{a} \sin\gamma. \end{cases}$$

Geht man zum Komplexen über

$$x_0 + i y_0 = n_0,$$

so lautet er

$$n_0 = -\frac{\sigma}{a} e^{-i\gamma} = -\frac{\sigma}{\cos\gamma}.$$

Die Hyperbel geht für alle Werte von $0 < \gamma < \pi$ durch den Nullpunkt und berührt dort die reelle Achse, wie sich unmittelbar ergibt, wenn man die Gleichung der Hyperbel in rechtwinkligen Koordinaten $(n = x + i y)$ hinschreibt. Sie artet in die Geraden $x = -\sigma$ und $y = 0$ aus, wenn $\gamma = 0\,(a = 0)$, und in $x = \sigma$ und $y = 0$, wenn $\gamma = \pi\,(a = \pi)$. Ferner ersieht man, daß im Äußeren der Hyperbel, also in dem Gebiet, in dem der Mittelpunkt n_0 liegt, $\Re\{f(n)\} < 0$ (schraffiert in den Abb. 3 und 4). Für $\varrho \to \infty$ verschwindet dort der Integrand exponentiell.

Nehmen wir im folgenden an, daß $\varrho \gg 1$, d. h. betrachten wir das Wellenbild in einer Entfernung, die groß gegen den Radius der Störung ist, so werden nur diejenigen Stellen des Integrationsweges einen wesentlichen Beitrag zum Integral nach n in (4a) liefern, wo $\Re\{f(n)\}$ seinen größten Wert annimmt. Dies findet bekanntlich in den Punkten („Sattelpunkt") statt für die $\frac{d f(n)}{d n} = 0$. Wir versuchen daher den Integrationsweg unter Beibehaltung der Grenzen 0 und ∞ so abzuändern, daß er, falls dies überhaupt möglich ist, durch einen solchen Sattelpunkt hindurchführt. In unserem Fall existiert ein einziger Sattelpunkt. Er ist

$$n_0 = -\frac{\sigma}{\cos a},$$

also der Mittelpunkt der Hyperbel I.

Um nun eine möglichst günstige Näherung zu erhalten, bestimmen wir den Integrationsweg durch den Sattelpunkt so, daß auf ihm $\Re\{f(n)\}$ am schnellsten zu- bzw. abnimmt. Diese Kurven erhalten wir (vgl. Anm. 5) aus der Beziehung

$$\Im m\{f(n)\} = \text{const} = \Im m\{f(n_0)\}.$$

Mit Hilfe der Entwicklung der Funktion $f(n)$ um den Sattelpunkt n_0

$$f(n) = i\left(-\frac{\sigma^2}{\cos a} + (n - n_0)^2 \cos a\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

geht sie über in

$$\Im m\{i(n - n_0)^2 \cos a\} = \Im m\left\{a\,|n - n_0|^2 e^{i\left[2 \operatorname{arc}(n - n_0) + \gamma + \frac{\pi}{2}\right]}\right\} = 0.$$

Das sind 2 aufeinander senkrecht stehende Gerade, welche mit der reellen Achse die Winkel $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ einschließen. Von den beiden Geraden kommt natürlich nur diejenige als Integrationsweg in Betracht, welche vollständig im schraffierten Gebiet liegt (II in Abb. 3 u. 4).

Nun müssen wir zusehen, ob wir unseren Weg, vom Nullpunkt ausgehend, über den Sattelpunkt nach $+\infty$ legen können. Wir bestimmen zunächst die Kurve durch den Nullpunkt, auf der $\Re\{f(n)\}$ am schnellsten abnimmt. Diese ergibt sich aus

$$\Im m\{f(n)\} = \Im m\{f(0)\} = 0,$$

was wieder eine gleichseitige Hyperbel ist (III in Abb. 3 und 4), deren Asymptoten mit der reellen Achse die Winkel $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ bilden. Der Mittelpunkt ist, ebenso wie bei

der Hyperbel I, der Sattelpunkt n_0. (Das muß natürlich so sein, denn das System der Hyperbeln, dem I angehört, bildet die Niveaulinien, das System, dem III angehört, die Fallinien, während der Mittelpunkt n_0 der beiden Hyperbelsysteme der dazugehörige Paß (Sattelpunkt) ist.) III berührt für alle Werte $0 \leq \gamma \leq \pi$ die imaginäre Achse und artet für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ $\left[\Re\mathrm{e}(a) = \frac{\pi}{2}\right]$ in die Geraden $x = 0$ und $y = +\sigma$ aus.

Die Lage des Sattelpunktes n_0, sowie die Lage der Gebiete und Wege ist abhängig von $\cos\alpha = a \cdot e^{i\gamma}$. Wir unterscheiden daher folgende 2 Fälle:

1. Fall. $0 \leq \Re\mathrm{e}(\alpha) \leq \frac{\pi}{2}$.

Durchläuft α in der α-Ebene den Integrationsweg 1 nach 2 (Abb. 2), so wandert der Sattelpunkt $n_0 = -\frac{\sigma}{\cos\alpha}$ in der komplexen n-Ebene von der negativ-reellen Achse im 2. Quadranten nach der positiv-imaginären Achse. Mit ihm drehen sich die Hyperbeln I und III und die Geraden II und II*. Abb. 3 zeigt die Konfiguration für einen festen Wert von α. Wir werden nun den Integrationsweg (in Abb. 3 stark ausgezeichnet) folgendermaßen führen:

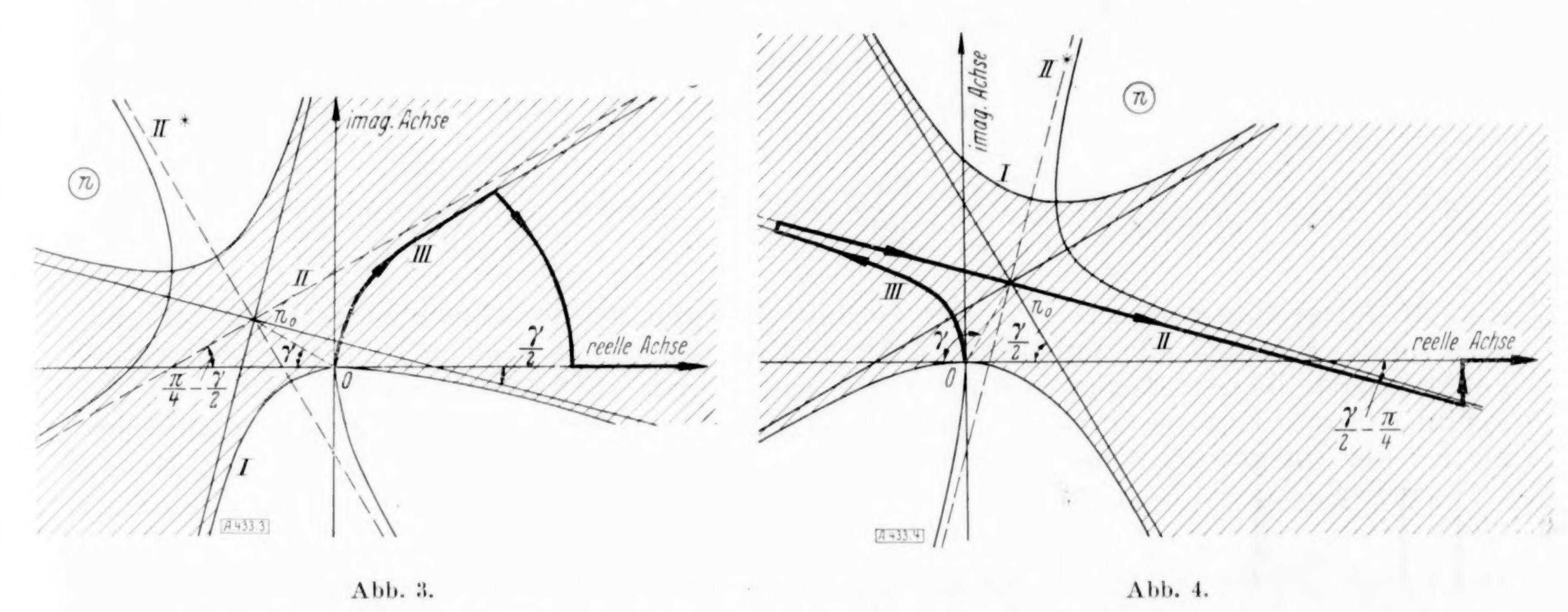


Abb. 3. Abb. 4.

Wir gehen vom Nullpunkt aus auf dem Teil der Hyperbel III, welcher vollständig im schraffierten Gebiet liegt; dann gehen wir etwa auf einem Kreis von genügend großem Radius zur positiv-reellen Achse und auf dieser schließlich ins Unendliche. Einen wesentlichen Beitrag zum Integral werden nur diejenigen Stellen des Weges liefern, welche auf dem Rande des schraffierten Gebietes liegen, denn dort findet für $\varrho \to \infty$ kein exponentielles Abnehmen des Integranden statt. In unserem Falle ist das, und zwar für alle Werte von α, nur der Punkt $n = 0$. Um den hiervon herrührenden Beitrag zu berechnen, führen wir als neue Integrationsvariable

$$n = i\,y$$

ein; somit ergibt sich, wenn wir für $J_1(n^2)$ nur das 1. Glied der Entwicklung um den Nullpunkt[6]) setzen,

$$\eta = -\frac{C}{\pi}\,\Re\mathrm{e}\left\{\int_1^2 d\alpha \int_0^\varepsilon y^3 \cdot e^{-2\varrho\sigma y - i\varrho \cdot y^2 \cos\alpha}\, dy\right\}.$$

Schätzt man nun das Integral nach y der Größe nach ab, so findet man unmittelbar, wenn man die Integration nach α sogleich vorwegnimmt, daß $|\eta|$ wie $\frac{1}{\varrho^4}$ gegen Null geht. Wir werden sehen, daß wir diesen Beitrag gegen den nun zu berechnenden vernachlässigen können.

2. Fall. $\frac{\pi}{2} \leq \Re\mathrm{e}(\alpha) \leq \pi$.

Durchläuft α den Integrationsweg 2 nach 3, so bewegt sich der Sattelpunkt n_0 von der positiv-imaginären Achse im 1. Quadranten nach der positiv-reellen Achse, und mit ihm drehen sich I, II und III. Den Integrationsweg legen wir folgendermaßen (stark ausgezeichnet in Abb. 4):

[6]) E. Jahnke u. Fr. Emde: Funktionentafeln, S. 90.

Wir gehen vom Nullpunkt wieder auf dem Teil der Hyperbel III, der vollständig im schraffierten Gebiet liegt, kehren dann um und gehen auf der Asymptote II durch den Sattelpunkt, dann z. B. auf einem Kreis von genügend großem Radius zur positiv-reellen Achse und auf dieser schließlich ins Unendliche. Den Beitrag vom Nullpunkt können wir in ähnlicher Weise wie in 1. vernachlässigen. Der Hauptbeitrag längs des ganzen Integrationsweges wird vom Sattelpunkt und dessen unmittelbarer Umgebung geliefert. Wir setzen für $f(n)$ die Entwicklung (6) im Sattelpunkt in unser Integral und führen die neue Integrationsvariable

$$n - n_0 = a^{-1/2} \cdot s_1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{s_1 \, e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cos^{1/2} a}$$

ein. Den Faktor $n\,J_1(n^2)$ in (4) können wir bei der Integration als langsam veränderlich ansehen und in 1. Näherung durch den Wert am Sattelpunkt n_0 ersetzen. Inwieweit das berechtigt ist, wird hernach untersucht werden. Somit erhalten wir aus (4):

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -\frac{2C}{\pi}\,\Re\left\{\int_2^3 d\,a \int d\,n \cdot n\,J_1(n^2) \cdot e^{i\varrho\left[-\frac{\sigma^2}{\cos a} + (n-n_0)^2 \cos a\right]}\right\} \\ &= -\frac{2C}{\pi}\,\Re\left\{\int_2^3 d\,a \cdot n_0\,J_1(n_0^2) \cdot e^{i\left[-\frac{\varrho\sigma^2}{\cos a} + \frac{\pi}{4}\right]} \cdot \frac{1}{\cos^{1/2} a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\,s_1 \cdot e^{-\varrho s_1^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \;.\;.\;.\;. \quad (7),$$

$$\eta = \frac{2C}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{\sigma}{\varrho^{1/2}}\,\Re\left\{e^{i\frac{\pi}{4}} \int_2^3 \frac{J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos a}\right)}{\cos^{3/2} a} \cdot e^{-\varrho\sigma^2 \cdot \frac{i}{\cos a}}\,d\,a\right\} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (7\text{a}).$$

B. Integration nach a. Aus der Gestalt des nun zu berechnenden Integrals erkennt man sofort, daß auch die Integration nach a längs des Weges 2 nach 3 mit Hilfe der Sattelpunktmethode bewerkstelligt werden kann, sofern man $\varrho\,\sigma^2 \gg 1$ voraussetzt. (Über die Bedeutung dieser Voraussetzung vgl. unter § 3.) Die Verhältnisse gestalten sich hier einfacher als bei der Integration nach n, so daß wir uns kürzer fassen können.

Wir setzen

$$g(a) = -\frac{i}{\cos a}.$$

Das Gebiet, wo $\Re\{g(a)\} < 0$, ist das schraffierte in Abb. 2. Als Sattelpunkt, welcher sich aus $\frac{d\,g(a)}{d\,a} = 0$ bestimmt, kommt nur

$$a = \pi$$

in Frage. Die Entwicklung von $g(a)$ im Sattelpunkt unter Vernachlässigung höherer Potenzen lautet

$$g(a) = +i\left[1 + \frac{(a-\pi)^2}{2}\right].$$

Aus der Beziehung $\Im\{g(a)\} = \Im\{g(\pi)\} = 1$ ergibt sich die Richtung, mit der wir in den Sattelpunkt $a = \pi$ hineingehen müssen. Sie schließt mit der positiv-reellen Achse den Winkel $\frac{\pi}{4}$ ein. Zur Ausführung der Integration setzen wir

$$a - \pi = -b \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

und erhalten für das Integral in (7a)

$$\int_2^3 = (-1) \cdot \frac{J_1(\sigma^2)}{-i} \cdot e^{i\left[\varrho\sigma^2 + \frac{\pi}{4}\right]} \cdot \int_{+\infty}^{0} d\,b \cdot e^{-\frac{\varrho\sigma^2}{2} b^2} = -\frac{J_1(\sigma^2)}{i} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}\,\varrho^{1/2}\,\sigma} \cdot e^{i\left[\varrho\sigma^2 + \frac{\pi}{4}\right]}.$$

Daher nach (7a)

$$\eta = -\frac{C\sqrt{2}}{\varrho} \cdot J_1(\sigma^2) \cdot \cos\varrho\,\sigma^2 \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8).$$

Gl. (8) gilt zunächst für $\varrho \gg 1$ und $\varrho\,\sigma^2 \gg 1$. Nun müssen wir noch überlegen, unter welchen Einschränkungen die Annahme gerechtfertigt ist, daß $n\,J_1(n^2)$ bei der Integration nach n und $\frac{J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos a}\right)}{\cos^{3/2} a}$ bei der Integration nach a in den betreffenden Integrationsintervallen

langsam veränderlich sind. Wir haben uns außerdem die Frage vorzulegen: Wie ändert sich η, wenn diese zuletzt genannten Annahmen zum Teil fallengelassen werden? Zu diesem Zwecke berechnen wir die nächste Näherung.

A. Integration nach n. Wir entwickeln $n\,J_1(n^2) = F(n)$ um den Sattelpunkt n_0 in eine Reihe und gehen bis zu quadratischen Gliedern.

$$F(n) = F(n_0) + (n - n_0)\,F'(n_0) + \frac{(n-n_0)^2}{2}\,F''(n_0)\,.$$

Dabei bedeuten

$$F(n_0) = n_0\,J_1(n_0^2)\,;$$

$$F'(n_0) = 2\,n_0^2\,J_0(n_0^2) - J_1(n_0^2)\,;$$

$$F''(n_0) = 2\,n_0\cdot J_0(n_0^2) + 2\,J_1(n_0^2)\cdot\left[\frac{1}{n_0} - 2\,n_0^3\right];$$

$$n_0 = \frac{\sigma}{\cos\alpha}\,;$$

$$n - n_0 = a^{-1/2}\,s_1\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{s_1\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cos^{1/2}\alpha}\,.$$

Das Integral (7) geht dann über in

$$\eta = -\frac{2\,C}{\pi}\,\Re\left\{\int_2^3 d\alpha\,\frac{e^{i\left[-\frac{\varrho\,\sigma^2}{\cos\alpha}+\frac{\pi}{4}\right]}}{\cos^{1/2}\alpha}\cdot\int ds_1\cdot\left[F(n_0) + \frac{s_1\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cos^{1/2}\alpha}\,F'(n_0) + \frac{s_1^2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\cos\alpha}\,F''(n_0)\right]e^{-\varrho\,s_1^2}\right\}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \frac{2\,C}{\pi^{1/2}}\cdot\frac{\sigma}{\varrho^{1/2}}\,\Re\left\{e^{i\frac{\pi}{4}}\int_2^3 d\alpha\,\frac{J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^{3/2}\alpha}\,e^{-\varrho\,\sigma^2\frac{i}{\cos\alpha}}\right\}\\ &+ \frac{C}{\pi^{1/2}}\cdot\frac{1}{\varrho^{3/2}}\,\Re\left\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\int_2^3 d\alpha\left[\frac{\sigma\cdot J_0\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^{5/2}\alpha} + \frac{J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\alpha}\right)}{\sigma\cdot\cos^{1/2}\alpha} - \frac{2\,\sigma^3\,J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^{9/2}\alpha}\right]e^{-\varrho\,\sigma^2\frac{i}{\cos\alpha}}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(9).$$

B. Integration nach α. Das 1. Integral in Gl. (9) berechnen wir in derselben Weise wie unter A. Wir setzen also:

$$G(\alpha) = \frac{J_1\left(\frac{\sigma^2}{\cos^2\alpha}\right)}{\cos^{3/2}\alpha}\,;$$

$$G(\alpha) = G(\pi) + (\alpha-\pi)\,G'(\pi) + \frac{(\alpha-\pi)^2}{2}\,G''(\pi)\,;$$

$$G(\pi) = \frac{J_1(\sigma^2)}{-i}\,;$$

$$G'(\pi) = 0\,;$$

$$G''(\pi) = i\cdot\left[2\,\sigma^2\,J_0(\sigma^2) - \frac{J_1(\sigma^2)}{2}\right];$$

$$\alpha - \pi = -b\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Die Integration liefert

$$-\frac{C\sqrt{2}}{\varrho}\,\Re\left\{J_1(\sigma^2)\cdot e^{i\,\varrho\,\sigma^2}\right\} - \frac{C}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\varrho^2}\cdot\Re\left\{\left[2\,J_0(\sigma^2) - \frac{J_1(\sigma^2)}{2\,\sigma^2}\right]e^{i\left(\varrho\,\sigma^2+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$

$$= -\frac{C\sqrt{2}}{\varrho}\,J_1(\sigma^2)\cos\varrho\,\sigma^2 + \frac{C}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\varrho^2}\left[2\,J_0(\sigma^2) - \frac{J_1(\sigma^2)}{2\,\sigma^2}\right]\sin\varrho\,\sigma^2\,.$$

Im 2. Summanden der Gl. (9) ersetzen wir den Klammerausdruck bei der Integration nach α durch seinen Wert an der Stelle $\alpha = \pi$, denn wir wollen in unserer Näherung nur bis zu Gliedern mit dem Faktor $\frac{1}{\varrho^2}$ gehen. Wir erhalten

$$\frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \Re \left\{ \left| J_0(\sigma^2) + \frac{J_1(\sigma^2)}{\sigma^2} - 2\sigma^2 J_1(\sigma^2) \right| e^{i\left(\varrho\sigma^2 + \frac{\pi}{2}\right)} \right\}$$

$$= - \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left| J_0(\sigma^2) + \frac{J_1(\sigma^2)}{\sigma^2} - 2\sigma^2 J_1(\sigma^2) \right| \sin \varrho\sigma^2 .$$

Somit ist in 2. Näherung

$$\left.\begin{aligned} \eta = & - \frac{C\sqrt{2}}{\varrho} J_1(\sigma^2) \cos \varrho\sigma^2 \\ & + \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left| J_0(\sigma^2) + 2\sigma^2 J_1(\sigma^2) - \frac{3}{2} J_1(\sigma^2) \right| \sin \varrho\sigma^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Nimmt man nun an, daß auch $\varrho \gg \sigma^2$, so kann man im allgemeinen den 2. Summanden der Gl. (10) gegen den 1. streichen und kommt auf Gl. (8) zurück. Diese Vernachlässigung ist jedoch nicht mehr gerechtfertigt, wenn $J_1(\sigma^2)$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho}$ und kleiner wird (d. h. wenn σ^2 gegen eine Nullstelle von $J_1(\sigma^2)$ rückt); denn in der Nähe einer Nullstelle von J_1 nimmt J_0 maximale Werte an $\left(\frac{d J_0(x)}{d x} = - J_1(x)\right)$.

Zum Schlusse dieses Paragraphen geben wir Gl. (8) an, wenn man für ϱ und σ ihre Werte nach Gl. (5) einsetzt,

$$\left.\begin{aligned} & \eta = - C\sqrt{2} \cdot \frac{d}{r} \cdot J_1\left(\frac{g d \cdot t^2}{4 r^2}\right) \cdot \cos \frac{g t^2}{4 r} \\ & \left[\frac{r}{d} \gg 1 ; \quad \frac{g t^2}{4 r} \gg 1 ; \quad \frac{g d \cdot t^2}{4 r^2} < \frac{r}{d}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

§ 3. Diskussion.

A. Zunächst wollen wir den speziellen Fall, der fast allein in der Literatur diskutiert wird, betrachten, daß der Radius d der Störung gegen Null geht. Aus Gl. (11) ersehen wir, daß wenn $d \to 0$ auch $\eta \to 0$. Um überhaupt eine merkliche Oberflächenerhebung zu erhalten, müssen wir fordern, daß das Volumen V der anfänglichen Störung während des Grenzübergangs konstant bleibt:

$$d^2 \pi C = V .$$

Da

$$\lim_{x \to 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2} ,$$

so geht, wenn $d \to 0$, (11) über in

$$\eta = - \frac{g t^2 V}{2^{5/2} \pi r^3} \cdot \cos \frac{g t^2}{4 r} \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

(12) gilt (vgl. Gl. (11)) unter der Bedingung $\frac{g t^2}{4 r} \gg 1$. Man überzeugt sich leicht, daß man im Falle $d \to 0$ die in (10) enthaltene zweite Näherung unberücksichtigt lassen kann. Gl. (12) wurde schon von H. Lamb[7]) nach der Kelvinschen „Methode der stationären Phase" abgeleitet, die als physikalisch einleuchtender Ersatz der Sattelpunktmethode angesehen werden kann.

Über die vorbereitenden Arbeiten von Cauchy[8]) und Poisson[9]) vgl. H. Burkhardt[10]). Das entsprechende 2-dimensionale Problem, wo die Oberflächenerhebung für große $\frac{g t^2}{4 x}$

$$\eta = (-) \frac{g^{1/2} t Q}{2 \pi^{1/2} x^{3/2}} \cos\left(\frac{g t^2}{4 x} - \frac{\pi}{4}\right)$$

lautet, wurde von H. Lamb vollständig für alle Werte von t und x in dem eben genannten Werke gelöst.

[7]) H. Lamb: Hydrodynamics, IV. Ed., p. 425.
[8]) Mém. des Sav. Etran., t. I (1827).
[9]) Mém. de l'Acad. Roy. d. Sc., t. I (1816).
[10]) Jahresber. d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, X, 2, 1 (1908), S. 429 ff.

Wir kehren nun zur Formel (12) zurück und betrachten zunächst die Erhebung der Oberfläche an einem festen Orte r im Laufe der Zeit. Abb. 5 stellt die Kurve $\eta = \eta(t)$ dar, und zwar etwa von denjenigen Werten von t an, von denen ab unsere Formel gilt $\left(\frac{g\,t^2}{4\,r} \gg 1\right)$. Die Erhebungen erfolgen mit wachsender Zeit immer schneller, während die Amplituden beständig zunehmen. Aus der Wahl der Maßstäbe der Achsen in Abb. 5 ergibt sich, daß für verschiedene Orte die gegenseitigen Abstände zweier entsprechender Phasen sich wie $\sqrt{r}$, die entsprechenden Erhebungen dagegen sich umgekehrt wie r^2 verhalten.

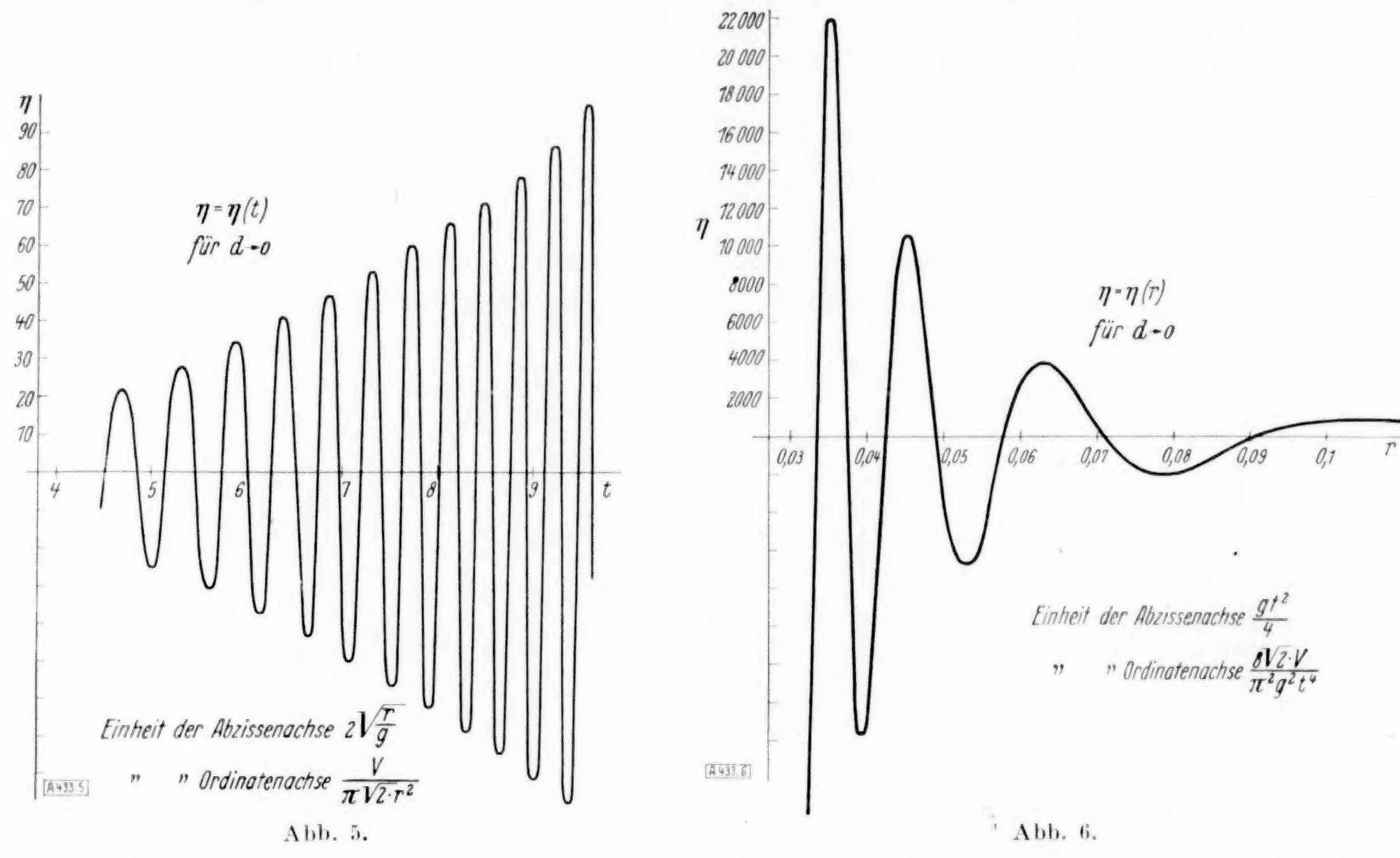


Abb. 5. Abb. 6.

Abb. 6 stellt das Wellenprofil in einem gegebenen Augenblick dar, hauptsächlich für den Bereich der Wellen, für den (12) gilt. Für verschiedene Zeiten verhalten sich die horizontalen Abstände zweier entsprechender Wellenpunkte wie t^2, die entsprechenden Erhebungen umgekehrt wie t^4. Daraus geht hervor, daß das Wellenprofil im Laufe der Zeit auseinandergezogen wird, d. h. daß die Wellenlänge einer bestimmten Welle beim Fortschreiten sich immer mehr vergrößert.

Der Umstand, daß die Amplituden der Wellen mit wachsendem t bzw. mit abnehmendem r ins Unendliche wachsen, ist natürlich nur eine Folge des Anfangszustandes $\lim d \to 0$. Wenn wir hernach die Störung bei endlichem Radius d betrachten, wird diese Unendlichkeit der Amplituden selbstverständlich verschwinden.

Falls der Grenzübergang $d \to 0$ schon vor den Integrationen ausgeführt wird, läßt sich ohne besondere Schwierigkeit das Integral η durch Reihenentwicklung lösen. So erhielt Lamb[11]) folgende nach Potenzen von $\frac{g\,t^2}{r}$ fortschreitende Reihe:

$$\eta = (-)\,\frac{V}{2\,\pi\,r^2}\cdot\left[\frac{1^2}{2!}\,\frac{g\,t^2}{r} - \frac{1^2\cdot 3^2}{6!}\left(\frac{g\,t^2}{r}\right)^3 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{10!}\left(\frac{g\,t^2}{r}\right)^5 - \ldots\right].$$

Da die Reihe nur sehr langsam konvergiert, ist sie für die Diskussion nicht zu gebrauchen. Jedoch auf einen Umstand, der sich aus dieser Reihe ergibt, wollen wir noch hinweisen. Wir sehen nämlich, daß sofort, nachdem die Störung im Nullpunkt erfolgt, die Oberfläche η in beliebig großer Entfernung vom Störungszentrum zu sinken beginnt. Es existiert daher überhaupt keine Wellenfront. (Der Anfang der Welle (entweder t klein oder r groß) kann aus Gl. (12) natürlich nicht erhalten werden.) Die erste Vertiefung des Wasserspiegels pflanzt sich mit unendlicher Geschwindigkeit fort. Diese Tatsache, auf die zuerst im 2-dimensionalen Falle Lord Rayleigh[12]) und B. Pidduck[13]) hinwiesen, ist nicht besonders überraschend, da ja die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen wurde.

[11]) l. c. Anm. 7.

[12]) On the instantaneous propagation of disturbance in a dispersive medium, exemplified by waves on water deep and shallow, Phil. Mag. Ser. VI, vol. 18 (1909), p. 5.

[13]) On the propagation of a disturbance in a fluid under gravity, Proc. Roy. Soc. Ser. A. 83 (1910), p. 347. — The wave-problem of Cauchy and Poisson for finite depth and slightly compressible fluid, Proc. Roy. Soc., Ser. A. 86 (1912), p. 396.

Setzen wir in (12) die Phase

$$\frac{g\,t^2}{4\,r} = c = \text{const},$$

so ergibt sich die Phasengeschwindigkeit v

$$v = \frac{d\,r}{d\,t} = \frac{g\,t}{2\,c} = \sqrt{\frac{g\,r}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Durch Elimination von c folgt

$$v = 2\,\frac{r}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\text{a}).$$

Sie ist demnach vom Ort und von der Zeit abhängig. Als Phasenbeschleunigung ergibt sich

$$\frac{d^2\,r}{d\,t^2} = \frac{g}{2\,c} = \text{Const}.$$

Jeder Wert der Phase eilt demnach mit einer konstanten Beschleunigung radial nach außen.

Die Periode τ und die Wellenlänge λ der Wellenbewegung bestimmen sich aus den beiden Gleichungen

$$\frac{g\,(t+\tau)^2}{4\,r} = \frac{g\,t^2}{4\,r} + 2\,\pi \qquad\qquad \frac{g\,t^2}{4\,(r-\lambda)} = \frac{g\,t^2}{4\,r} + 2\,\pi\,.$$

Unter Benutzung von $\frac{g\,t^2}{4\,r} \gg 1$ finden wir

$$\tau = \frac{4\,\pi\,r}{g\,t}\,, \qquad \lambda = \frac{8\,\pi\,r^2}{g\,t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

(was schon Cauchy[14]) und Poisson[15]) angaben).

Die Phasengeschwindigkeit ist in Übereinstimmung mit Gl. (13a) wieder

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = 2\,\frac{r}{t}\,.$$

Führen wir in v die Wellenlänge λ nach Gl. (14) ein, so erhalten wir

$$v = \sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\,\pi}}\,,$$

also dieselbe Formel wie bei den ebenen Wasserwellen. Daher wird auch die Gruppengeschwindigkeit in beiden Fällen gleich, nämlich $\frac{v}{2}$.

B. Nun wollen wir die Oberfläche η diskutieren, wenn der Radius d der Störung eine endliche Größe hat. (Siehe Ende § 2, Gl. (11).)

Zum Vergleich geben wir die Erhebung im entsprechenden 2-dimensionalen Problem an, das verhältnismäßig frühe von W. Burnside[16]) gelöst wurde. Er fand im wesentlichen unter denselben Voraussetzungen wie oben

$$\eta = (-)\,\frac{4\,C}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{g\,t^2}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{g\,d\cdot t^2}{4\,x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Für solche Werte von r, t und d, für die $\frac{g\,d\cdot t^2}{4\,r^2} \ll 1$, reduziert sich (11) auf (12). Auf diesen Fall brauchen wir daher nicht nochmals eingehen.

Da der cos-Faktor in (11) sich verhältnismäßig schnell ändert, können wir den Faktor $\frac{1}{r}\,J_1\left(\frac{g\,d\cdot t^2}{4\,r^2}\right)$ als eine Amplitude deuten, die allerdings sowohl zeitlich wie räumlich veränderlich ist. Im folgenden werden wir auf die Amplitude unser besonderes Augenmerk richten, während wir auf die Diskussion des cos-Faktors, welche bereits in A geschah, nicht weiter einzugehen brauchen.

Zunächst betrachten wir wieder die Erhebung der Oberfläche an einer festen Stelle r im Laufe der Zeit. Eine so bequeme und allgemeine Darstellung der Kurve $\eta = \eta\,(t)$ wie bei A ist hier nicht möglich. Wir müssen uns begnügen, für einen bestimmten Wert von r, d und C die Kurve zu zeichnen. Dies ist in Abb. 7 geschehen. (Dabei müßte man eigentlich in der Nähe der Nullstellen von J_1 auf Gl. (10) zurückgehen; doch spielt die Verbesserung

[14]) Cauchy: p. 244. l. c. Anm. 8.
[15]) Poisson: p. 163. l. c. Anm. 9.
[16]) On deep-water waves resulting from a limited original disturbance, Proc. Lond. Math. Soc. 20 (1889), p. 22.

bei dem gewählten Maßstab der Abb. 7 (und auch der Abb. 8) keine bedeutende Rolle, so daß wir sie außer acht gelassen haben.) Die Amplitude der Wellenbewegung bleibt überall endlich und ist selbst wieder wellenförmig.

Die Erhebung an der festen Stelle r ist ein Maximum, wenn

$$\frac{g\,d\,t^2}{4\,r^2} = a_n\,,$$

wo a_n die Argumente der aufeinanderfolgenden Maxima und Minima der Besselschen Funktion 1. Ordnung sind (und zwar ist angenähert $a_1 \approx 1{,}84$; $a_2 \approx 5{,}375$; $a_3 \approx 8{,}535$). Die Ordinaten der aufeinanderfolgenden Maxima der Amplituden (bei festem r) nehmen mit wachsender Zeit t ab, und zwar für große $\frac{g\,d\,t^2}{4\,r^2}$ angenähert wie $\frac{4\,C}{\sqrt{g\,d\,\pi}} \cdot \frac{1}{t}$. Letzteres ergibt sich, wenn man in (11) für J_1 die bekannte asymptotische Entwicklung setzt:

$$\eta = -\frac{4\,C}{\sqrt{g\,d\,\pi}} \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin\left(\frac{g\,d\,t^2}{4\,r^2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{g\,t^2}{4\,r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

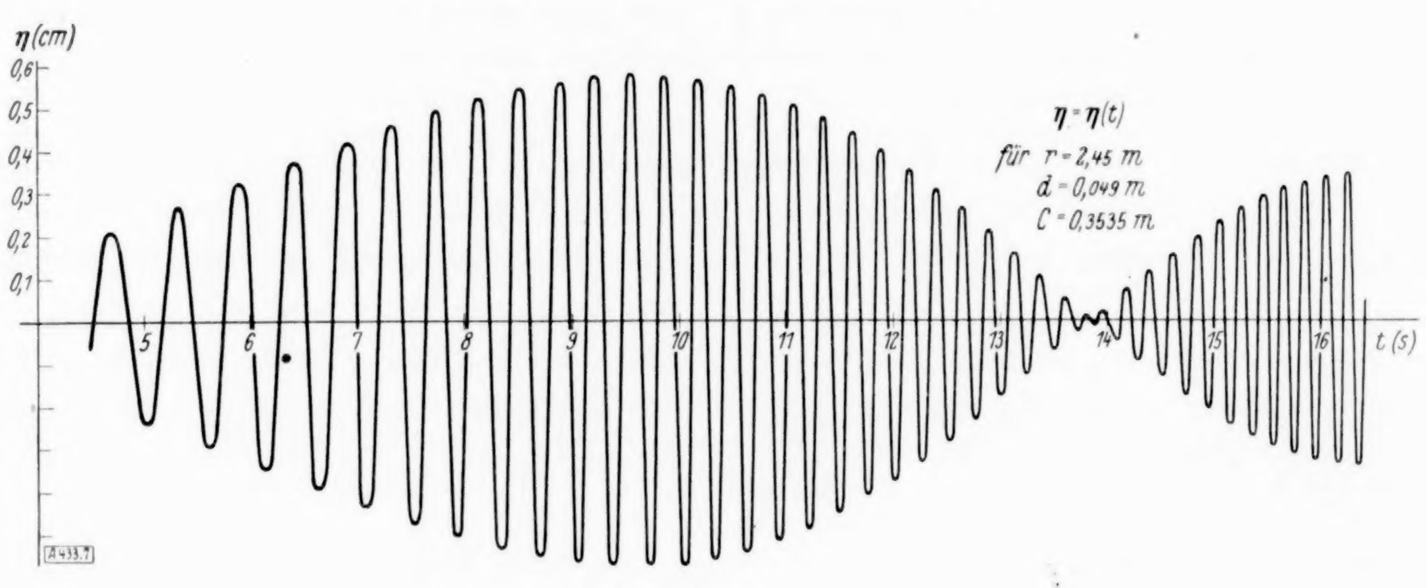


Abb. 7.

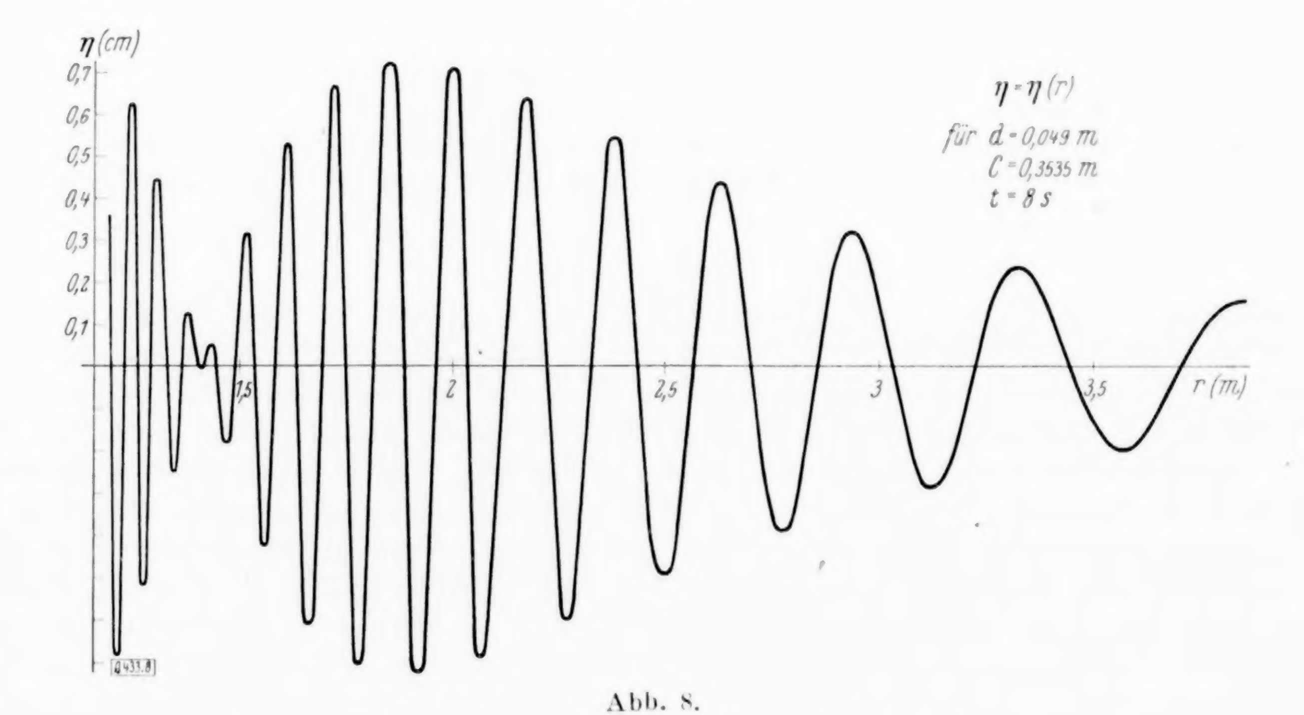


Abb. 8.

Die Zeit, welche das n^{te} Maximum braucht, um an die Stelle r zu gelangen, ist

$$t_n = 2\,r\sqrt{\frac{a_n}{g\,d}}.$$

Weiter ergibt sich, daß die Stellen, für welche das Maximum im Laufe der Zeit erreicht wird, sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\frac{r}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\,d}{a_n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

nach außen bewegen, und zwar das 1. (und relativ größte) Maximum mit der größten, die nachfolgenden mit immer kleinerer Geschwindigkeit.

Wir betrachten andererseits die Nullstellen J_1. Diesen entsprechen nach der korrigierten Gl. (10) Stellen zwar nicht von vollständiger Ruhe, aber von nur geringer Bewegung. Auch diese pflanzen sich mit konstanter Geschwindigkeit fort. Würde man daher die Wasserfläche von oben betrachten, so sähe man außer den stark bewegten Zonen Ringe nahezu glatten Wassers, welche mit konstanter, aber unter sich verschiedener Geschwindigkeit fortlaufen. Wenn V_i die Geschwindigkeit des i^{ten} dieser Ringe bedeutet, so gilt entsprechend Gl. (16)

$$V_1 : V_2 : V_3 : \ldots = \frac{1}{\sqrt{b_1}} : \frac{1}{\sqrt{b_2}} : \frac{1}{\sqrt{b_3}} : \ldots = 1 : 0{,}738 : 0 : 0{,}614 : \ldots$$

[b_i sind die Argumente der aufeinanderfolgenden Nullstellen von J_1.]

Abb. 8 stellt das Wellenprofil zur Zeit $t\,(=8\,\text{sec})$ dar. Die Maxima der Amplituden rücken bei abnehmendem r näher zusammen, während die Ordinaten derselben nahezu konstant bleiben (vgl. Gl. (15)).

Schließlich wollen wir untersuchen, welchen Einfluß der Radius d und die Tiefe C der Störung auf die Wellenform ausüben.

Die Ordinaten der Oberflächenerhebung sind nach Gl. (11) direkt proportional C, was physikalisch verständlich ist. Eine weitere Wirkung übt die Tiefe C der anfänglichen Störung auf die Wellenbewegung nicht aus.

Bemerkenswert ist, daß im Bereiche der Näherung (11) der Radius d der Störung keinen direkten Einfluß auf die Wellenlänge und Periode der Wellen (Gl. (14)) hat, sondern nur auf die Amplitude, und zwar sind für große $\frac{g\,d \cdot t^2}{4\,r^2}$ die Abstände aufeinanderfolgender Maxima (oder auch aufeinanderfolgender Nullstellen) der Amplitude sowohl bei festem r wie auch bei festem t umgekehrt proportional zu d (vgl. Gl. (15)). Jedoch übt d einen indirekten Einfluß auf die Wellenlänge λ und die Periode τ der Wellenbewegung insofern aus, als die Amplitude, die ja von d abhängig ist, diejenigen Wellenlängen und Perioden, welche in der Nähe der Maxima der Amplitude liegen, hervorhebt, diejenigen Wellenlängen und Perioden aber, welche in der Nähe der Nullstellen liegen, unterdrückt. So erhalten wir aus den Gl. (14) und (16) die Wellenlänge λ_n und Periode τ_n der Welle in der Nähe des n^{ten} Maximums, welches an einer festen Stelle r erreicht wird,

$$\lambda_n = \frac{2\,\pi\,d}{a_n}, \qquad \tau_n = 2\,\pi\sqrt{\frac{d}{g\,a_n}}.$$

Demnach ist λ_n direkt proportional mit dem Radius der Störung, τ_n direkt proportional mit $\sqrt{d}$, die Phasengeschwindigkeit der Welle in der Nähe des n^{ten} Maximums infolgedessen direkt proportional mit $\sqrt{d}$.

Schlußbemerkung. Obwohl die Ringwellen eine so alltägliche Erscheinung sind, hat man sich in der theoretischen Physik noch wenig damit beschäftigt. Das 2-dimensionale Problem (Fortpflanzung in geradlinigen Wellenzügen) kann durch die Arbeiten von Burnside[17]) und Lamb[18]) als gelöst betrachtet werden sowohl für Anfangsstörungen von endlicher Breite als für solche, die auf eine Linie konzentriert sind. Dagegen hat man sich bei dem 3-dimensionalen Problem (Fortpflanzung in Ringen) meist auf Anfangsstörungen beschränkt, die auf einen Punkt konzentriert sind (§ 3 A), so daß die bemerkenswerten Eigenschaften der Amplitude, wie wir sie im § 3 B dargelegt haben, nicht erhalten werden konnten. Überdies geschah die Berechnung der Integrale auf die mathematisch nicht ganz befriedigende „Methode der stationären Phase“[19]). In anderen Arbeiten[20]) wurde angenommen, daß die Störung zur Zeit $t=0$ in gewisser Weise über die ganze Flüssigkeit ausgebreitet ist (kontinuierliche Anfangsform), was die mathematische Behandlung vereinfacht, aber der naturgemäßen Formulierung des Problems Abbruch tut.

Zum Schluß möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Prof. A. Sommerfeld, für wertvolle Anregungen und bereitwillige Hilfe herzlich danken, desgleichen Herrn Dr. W. A. Maue für Besprechungen über die Sattelpunktmethode. 433

[17]) Burnside: l. c. Anm. 16.

[18]) Lamb: l. c. Anm. 7.

[19]) Lamb: l. c. Anm. 7. — Havelock: The propagation of groups of waves in dispersive media. Proc. Roy. Soc. 81 (1908), p. 398.

[20]) K. Terazawa: On deep-sea water waves caused by a local disturbance, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A 92 (1915), p. 57. — On the oscillations of deep-sea surface caused by a local disturbance, Science Rep. Tôhoku Univ. 6 (1917), p. 169.

Unterteilung des Tafelschritts.

(„Untertafelung“ — „Briggs-Moutonsche Aufgabe“.)

Von *F. Emde* in Stuttgart.

Bei der Berechnung einer Zahlentafel erspart man sich gewöhnlich viel Rechenarbeit, wenn man nicht sämtliche Werte der Tafel nach der Definition der zu tafelnden Funktion berechnet, sondern nur einige gleichmäßig über die ganze Tafel verteilte Werte („Ausgangswerte“) und darauf die dann noch fehlenden aus den schon berechneten erschließt. Man berechnet also die Tafel, kurz gesagt, erst nur in weiten Schritten und geht dann durch Interpolation zu feineren Schritten über, z. B. zu 10mal so feinen. Dafür stehen verschiedene Verfahren zu Gebote.

I.

Nach Lagrange kann man durch die Punkte, die die berechneten Werte darstellen, oder durch einige von ihnen eine Parabel höherer Ordnung legen. Man ersetzt also die Funktion durch ein Polynom. Die Vorzahlen dieses Polynoms hängen linear von den schon berechneten Werten (den Ausgangswerten) ab. Die wirkliche Ausführung dieses einfachen Gedankens ist meist sehr mühsam. Nun braucht man aber die Funktionswerte, wenigstens für die Tafel, nicht für beliebige Werte der unabhängigen Veränderlichen, sondern nur für wenige, über das grobe Intervall gleichmäßig verteilte Werte. Setzt man diese Werte ein, läßt aber die Ausgangswerte unbestimmt, so erhält man für jeden Teilpunkt ein für allemal eine lineare Funktion der Ausgangswerte mit numerischen Koeffizienten, die sich auf beliebige zu tafelnde Funktionen anwenden läßt. Legt man z. B. die Parabel durch 6 äquidistante Punkte $y_{-2} \dots y_3$, so erhält man für den Funktionswert in der Mitte zwischen ihnen den Ausdruck (L 7, p. 45)

$$y_{0,5} = \frac{75}{128}(y_0 + y_1) - \frac{125}{128}\,\frac{y_{-1} + y_2}{10} + \frac{75}{64}\,\frac{y_{-2} + y_3}{100}.$$

Bei neu zu berechnenden Tafeln so zu interpolieren, empfiehlt K. Pearson (L 7, p. 22). Man erspare es sich so, die Differenzenstaffel für die erst grob geteilte Tafel zu bilden. Zur Sicherung des Ergebnisses gegen Rechenfehler genüge es, erst nach der Verfeinerung des Tafelschritts die Differenzenstaffel zu bilden.

Gegen diesen Rat wendet sich L. J. Comrie (L 12). Wenn man so verfahre, könnten beträchtliche Fehler in den Ausgangswerten unbemerkt bleiben, weil sie bei der Verfeinerung des Tafelschritts die neuen Nachbarwerte in Mitleidenschaft ziehen und daher im Gang der Differenzen nicht zum Vorschein kommen. Man müsse Produkte aus vielziffrigen Zahlen bilden. Bei vielstelligen Tafeln reichten dazu die Einstellwerke der Rechenmaschinen nicht aus. Die aufeinanderfolgenden Produkte seien von derselben Größenordnung statt abzunehmen. Das von Pearson empfohlene Verfahren sei sehr mühsam. Aus allen diesen Gründen sei es zu verwerfen. (Siehe auch L 17, p. 853.)

II.

Wenn man schon für die grob gestufte Tafel die Differenzenstaffel gebildet hat, so kann man die Vorzahlen des Ersatzpolynoms durch die Differenzen statt durch die Ausgangswerte selbst ausdrücken. Von jeder Ordnung kommt in dem Polynom je eine Differenz vor (bei Mittelwertbildungen zwei). Man gelangt so zu den bekannten Interpolationsformeln von Bessel und von Stirling. (Die Newtonsche kommt praktisch nur am Anfang und Ende der Tafel in Betracht.) Setzt man an jedem Teilpunkt den Wert der unabhängigen Veränderlichen ein und läßt die Ausgangsdifferenzen unbestimmt, so erscheinen die Funktionswerte an den Teilpunkten als lineare Funktionen von Differenzen verschiedener Ordnung mit numerischen Koeffizienten. Diese Koeffizienten findet man in den Interpolationstafeln zusammengestellt, z. B. am Schluß der Bücher von Rice (L 4) und Lindow (L 10). Siehe auch L 14, p. 110 . . . 125. Ein Beispiel ist die bekannte Formel für die Interpolation in die Mitte:

$$y_{0,5} = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{5}{8}\,\frac{II_0 + II_1}{10} + \frac{75}{64}\,\frac{IV_0 + IV_1}{100} - \frac{625}{256}\,\frac{VI_0 + VI_1}{1000} + \dots .$$

Hierbei sind die groben Differenzen in der folgenden Weise bezeichnet:

$-1{,}0$	y_{-1}		II_{-1}		IV_{-1}
$(-0{,}5)$		$I_{-0,5}$		$III_{-0,5}$	
$\mp 0{,}0$	y_0		II_0		$IV_0 \dots\dots$
$(+0{,}5)$	$y_{0,5}$	$I_{0,5}$		$III_{0,5}$	
$+1{,}0$	y_1		II_1		IV_1 .

Wie ersichtlich, kann man hier wenigstens erwarten, daß im allgemeinen jedes folgende Produkt klein gegen das vorhergehende ist. Wenn man einer fertigen Tafel einen vereinzelten Zwischenwert entnehmen will, wird man in der angegebenen Weise verfahren[1]; nicht aber, wenn man eine neu zu berechnende Tafel feiner stufen und die Stufen nicht gerade nur halb so groß machen will. Denn dafür hat man bequemere Wege.

Wenn man von der groben Teilung der Tafel zu einer mehr als 10 mal so feinen übergehen will, so interpoliert man ein oder mehrere Male in die Mitte und geht erst dann an die Fünf- oder Zehn-Teilung. Die Zahl der Ausgangswerte kann man natürlich auch nicht beliebig verringern. Comrie (L 12, p. 510) rät dazu, die Ausgangswerte so dicht zu wählen, daß die siebenten Differenzen nicht 1000 Einheiten der letzten Stelle übersteigen. Sonst würde es schwierig, mittels der Differenzenstaffel Rechenfehler aufzudecken.

III.

Denken wir uns für die feiner gestufte Tafel die Differenzenstaffel gebildet. Wenn uns für alle Differenzen irgendeiner Ordnung, sagen wir der n-ten, die Zahlenwerte gegeben werden, von den Differenzen niedrigerer Ordnung aber nur je ein Zahlenwert, so können wir die ganze Differenzenstaffel und die Funktionswerte rekonstruieren. Denn wir brauchen nur zu dem einen gegebenen Differenzenwert $(n-1)$-ter Ordnung die Werte n-ter nach und nach zuzuschlagen, um alle Differenzenwerte $(n-1)$-ter Ordnung zu erhalten. Dann kann man ebenso alle Differenzen $(n-2)$-ter Ordnung herstellen usw., und schließlich die Funktionswerte an den Teilpunkten des groben Intervalls. Ein besonders einfacher Fall ist der, daß die Differenzen n-ter Ordnung konstant sind, also die Differenzen $(n+1)$-ter Ordnung $=0$.

H. Briggs und G. Mouton haben sich daher die Aufgabe gestellt, aus den Differenzen der groben Staffel je einen Differenzenwert jeder Ordnung der feinen Staffel zu bestimmen. Diese Aufgabe ist aber erst von Lagrange allgemein gelöst worden (L 1)[2].

Die Anweisung zur Berechnung je einer feinen Differenz aus den groben für Zehnteilung des groben Schritts auf Grund der Besselschen Formel ist im folgenden tabellarisch zusammengestellt.
Bei der fortlaufenden Summation können kleine Fehler, z. B. die Abrundungsfehler, bedeutend anwachsen. Um das Ergebnis gegen solche Fehler zu sichern, muß man mit 2 bis 3 Stellen mehr rechnen, als im Ergebnis verlangt werden („Schutz-Zusatzstellen"). Also muß man auch die Ausgangswerte genauer ausrechnen, als es sonst nötig wäre. Die Zusatzstellen beanspruchen natürlich die Aufnahmefähigkeit der Rechenmaschinen und können deshalb bei vielstelligen Tafeln zu Umständlichkeiten führen.

Für jedes grobe Intervall muß von jeder Ordnung eine Differenz aufs neue bestimmt werden.

Wenn man eine Rechenmaschine benutzt, ist die Rechnung trotzdem noch bequem, besonders, wenn zwei Personen zusammenarbeiten, von denen die eine die Maschine bedient und diktiert und die andere schreibt.

Comrie zeigt (L 11, p. 447), daß für die fortlaufende gleichzeitige Summierung von zwei Differenzen besonders die Rechenmaschine „Brunsviga Dupla" geeignet ist. Für jemand, der solche Rechnungen bisher nur von Hand oder mit zwei getrennten Maschinen oder in zwei Rechnungsgängen mit einer Maschine ausgeführt habe, sei die Einfachheit des Rechnungsablaufs auf der Brunsviga Dupla wirklich faszinierend. Wesentlich ist dabei, daß die Maschine zwei Empfangswerke und eine Einrichtung hat, um Zahlen aus dem Empfangswerk in das Stellwerk zu werfen.

---

[1] Vielstellige Tafeln kann man nicht gut für lineare Interpolation einrichten, weil sie sonst zu umfangreich werden würden. Um dennoch auch bei vielstelligen Tafeln die Interpolation noch einigermaßen bequem zu machen, wird in England nach einem Vorschlag von K. Pearson neben die Funktionswerte die zweite und, wenn nötig, auch noch die vierte und die sechste Differenz gedruckt. Einen Zwischenwert erhält man dann nach der Laplace-Everettschen Interpolationsformel ($\xi = 1 - x$)

$$y = \xi y_0 + \binom{\xi+1}{3} II_0 + \binom{\xi+2}{5} IV_0 + \dots$$
$$+ x y_1 + \binom{x+1}{3} II_1 + \binom{x+2}{5} IV_1 + \dots,$$

wobei man vorteilhaft eine Interpolationstafel benutzen wird, z. B. die von E. Chappell (London, 41 Westcombe Park Road, 1929) oder die von A. J. Thompson (Tracts for computers No. V, London 1921, Cambridge University Press). Siehe auch L 14, p. 126 . . . 129 und L 17, p. 747.

Ohne Differenzen sollten vielstellige Tafeln nicht mehr gedruckt werden.

[2] Die Ableitung der Formeln auf Grund der Besselschen Interpolationsformel gibt Rice (L 4, p. 83 . . . 91), auf Grund der Stirlingschen Radau (L 3, p. 21). Die Zahlenwerte für die Zwei-, Fünf- und Zehn-Teilung des Tafelschritts auf Grund der Gaußschen Formel findet man in der bekannten fünfstelligen Logarithmentafel von F. G. Gauß (L 2), einige Zahlenwerte für Zehnteilung nach Bessel und Stirling bei Milne-Thomson (L 15, p. 87). Thiele (L 6, S. 90 . . . 95) und Steffensen (L 9, p. 71 . . . 79) drücken umgekehrt die groben Differenzen durch die feinen aus. Bauschinger (L 5), Whittaker-Robinson (L 8, p. 53 . . . 57) und Davis (L 14, p. 88) geben nur die Ableitung auf Grund der Newtonschen Formel.

Berechnung je einer feinen Differenz aus den groben bei Zehnteilung des Tafelschritts (Besselsche Interpolationsformel).
Differenzen in oder symmetrisch zur Mitte des groben Intervalls.

	$\bar{I}_{0\cdot 50} =$	$\overline{III}_{0\cdot 50} =$	$0 \approx \bar{V}_{0\cdot 50} =$	$0 \approx \overline{VII}_{0\cdot 40} =$
$\frac{I_{0\cdot 5}}{10} \times$	$+1{,}0$	0	0	0
$+\frac{III_{0\cdot 5}}{1\,000} \times$	$-4{,}0$	$+1{,}0$	0	0
$+\frac{V_{0\cdot 5}}{10\,000} \times$	$+4{,}48$	$-1{,}225$	$+0{,}1$	0
$+\frac{VII_{0\cdot 5}}{100\,000} \times$	$-6{,}7$	$+2{,}0$	$-0{,}6$	$+0{,}01$

	$II_{0\cdot 50} =$	$0 \approx IV_{0\cdot 50} =$	$0 \approx VI_{0\cdot 50} =$
$\frac{II_{0\cdot 0} + II_{1\cdot 0}}{100} \times$	$+0{,}5$	0	0
$+\frac{IV_{0\cdot 0} + IV_{1\cdot 0}}{10\,000} \times$	$-10{,}375$	$+0{,}5$	0
$+\frac{VI_{0\cdot 0} + VI_{1\cdot 0}}{100\,000} \times$	$+22{,}36125$	$-1{,}44$	$+0{,}05$

Vernachlässigbar
$I < 5$
$III < 120$
$V < 1100$
$VII < 7500$
$II < 50$
$IV < 240$
$VI < 1100$
Einheiten der letzten Stelle

$$I_{0\cdot 55} = \bar{I}_{0\cdot 50} + 0{,}5\, II_{0\cdot 50} \qquad III_{0\cdot 55} = \overline{III}_{0\cdot 50} + 0{,}5\, IV_{0\cdot 50} \qquad V_{0\cdot 55} = \bar{V}_{0\cdot 50} + 0{,}5\, VI_{0\cdot 50}.$$

Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung Herrn Comries kann man mit den (nach Patenten von Ellis gebauten) „National“-Buchungs-Maschinen (Klasse 3000) sechs Differenzen gleichzeitig addieren. Die Untertafelung sei durch diese Maschinen vollkommen revolutioniert worden. (Siehe auch L 16.) Zusatz bei der Korrektur: Mit den Multiplex-Buchungsmaschinen der Astra-Werke (Chemnitz) kann man wahrscheinlich noch höhere Differenzen ebenso addieren. Solche Maschinen kosten rund 6000 RM. Siehe Lenz, Die Rechen- und Buchungsmaschinen, 3. Aufl., Leipzig 1932 bei Teubner, S. 85 und 92.

Wir wollen das Verfahren an einem Zahlenbeispiel veranschaulichen. Die folgende Zahlentafel 1 gibt 8-stellig 4 äquidistante Werte der Funktion[3]) (L 18)

$$y = f(x) = \frac{1}{0{,}25\,!} \int_0^x e^{-t^4}\, dt = \frac{(-0{,}75 \mid x^4)!}{0{,}25\,!\, 4}$$

und die Differenzen bis zur 7. Ordnung. Aus diesen Zahlen soll $f(x)$ für $x = 0{,}91 \mid 0{,}92 \mid \ldots 0{,}99$ bestimmt werden. Aus den groben Differenzen, die in der Zeile 0,95 stehen, berechnen wir nach der eben gegebenen tabellarischen Anweisung die feinen Differenzen, die in der Zahlentafel 2 kursiv gedruckt sind. Die 5. und die folgenden feinen Differenzen verschwinden.

[3]) Bei K. Pearson: Tables of the incomplete Γ-function (London 1922, H. M. Stationery Office) findet man 7-stellige Zahlenwerte für unsere Funktion in der letzten (mit $p = -0{,}75$ überschriebenen) Spalte der linken Seiten 118 ... 126, wobei $2x^4 = u$ gesetzt ist:

$$y_4 = I(u \mid p) = I(2x^4 \mid -0{,}75)$$

für $u = 0{,}1 \mid 0{,}2 \mid \ldots 27{,}0$ oder $x = 0{,}47 \ldots 1{,}92$. Für noch größere x unterscheidet sich die Funktion von 1 um weniger als 10^{-7}.
Allgemein ist

$$\int_0^x e^{-t^n}\, dt = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1 \mid x^n\right)!}{n} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} \mid x^n\right)}{n}$$

und bei Pearson mit $u = \sqrt{n}\, x^n$ und $p = -\frac{n-1}{n}$

$$y_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\,!} \int_0^x e^{-t^n}\, dt = I(u \mid p) = I\left(\sqrt{n}\, x^n \mid -\frac{n-1}{n}\right)$$

mit Zahlentafeln auf S. 118 ... 138 mit 7 Dezimalen für

$p = -1{,}00 \quad -0{,}95 \quad -0{,}90 \ldots\ldots -0{,}05 \quad -0{,}00$
$n = \infty \quad 20 \quad 10 \ldots\ldots 1{,}05 \ldots 1$

und auf S. 163 ... 164 mit 5 Dezimalen für $u = 0{,}1 \ldots 6{,}0$ und

$p = -1{,}00 \quad -0{,}99 \ldots\ldots -0{,}76 \quad -0{,}75$
$n = \infty \quad 100 \ldots\ldots 4{,}17 \quad 4$.

Darauf erhalten wir durch Aufsummieren von rechts nach links die gesuchten 9 Werte von $f(x)$. Der Vergleich mit dem gegebenen Wert von $f(1,0)$ zeigt, daß wir $f(1,0)$ um 6 Einheiten der 8. Dezimale zu klein erhalten haben. Ferner ist $f(0,95) = 0,909\ 728\ 33$. Unser Wert ist also um 43 Einheiten der 8. Dezimale zu klein. Von den 8 Dezimalen können wir nur 6 behalten.

Zahlentafel 1.

x	$y = f(x)$	I	II	III	IV	V	VI	VII
		+	—		+		—	—
0,8	0,817 812 69		14 883 22		1 385 66		243 49	
		65 388 31		— 1 627 23		+ 703 78		433 95
0,9	0,883 201 00	114 266 17	16 510 45	— 1 165 02	2 089 44	+ 730 12	677 44	594 51
		48 877 86	32 558 69	+ 462 21	4 205 22	+ 26 34	1 515 44	160 56
1,0	0,932 078 86	81 707 48	16 048 24	+ 3 040 20	2 115 78	— 785 32	838 00	
		32 829 62		+ 2 577 99		— 811 66		
1,1	0,964 908 48		13 470 25		1 304 12			

Zahlentafel 2.

x	$y = f(x)$	I	II	III	IV
		+	—		+
0,90	*0,883 201 60*				
		5 640 81			
1	0,888 841 81		167 48		
		5 473 33		— 35	
2	0,894 315 14		167 83		
		5 305 50		— 12	
3	0,899 620 64		167 95		
		5 137 55		+ 11	
4	0,904 758 19		167 84		
		4 969 71		+ 34	
5	0,909 727 90		*167 50*		*23*
		4 802 21		+ *57*	
6	0,914 530 11		166 93		
		4 635 28		+ 80	
7	0,919 165 39		166 13		
		4 469 15		+ 103	
8	0,923 634 54		165 10		
		4 304 05		+ 126	
9	0,927 938 59		163 84		
		4 140 21			
1,00	0,932 078 80				

IV.

In sinnreicher Weise benutzt Comrie (L 12 und L 15, p. 91) die beiden unter II und III geschilderten Verfahren nebeneinander, um noch bequemer zu den einzuschaltenden Funktionswerten zu gelangen. Der Hauptnachteil des Briggs-Moutonschen Verfahrens III besteht darin, daß man zum Schutz gegen Fehlerhäufungen die Rechnung mit Zusatzstellen belasten muß. Dieser Nachteil wäre beseitigt, wenn es gelänge, in den gesuchten einzuschaltenden Werten die noch gewünschte letzte Ziffer rechts für sich vorauszubestimmen und dadurch von der fortlaufenden Summation unabhängig zu machen. Ohne fortlaufende Summation arbeitet das Verfahren II, das jedoch als Ganzes viel mühsamer als III ist. Kann man nach II die letzte Ziffer rechts für sich allein finden, ohne zugleich auch alle übrigen mitberechnen zu müssen?

Der einzuschaltende Wert y_ν bestimmt sich aus den groben Differenzen $D_{0,5}^{(\lambda)}$ nach der Besselschen Interpolationsformel in der Form

$$y_\nu = y_0 + D_{0,5}^{(1)} b_{1,\nu} + D_{0,5}^{(2)} b_{2,\nu} + \ldots + D_{0,5}^{(n)} b_{n,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} D_{0,5}^{(\lambda)} b_{\lambda,\nu},$$

also als Summe von n Gliedern. Zur letzten Ziffer von y_ν wird im allgemeinen jedes dieser n Glieder beitragen. Der Beitrag eines Gliedes wird durch seine Einer und Zehntel hinreichend genau bestimmt sein, also durch zwei Ziffern. Für diese zwei Ziffern hat Comrie Tafeln bis $n = 4$ berechnet und im „Nautical Almanac for 1931" (L 13, p. 836 ... 859) veröffentlicht (auch als Sonderdruck käuflich). Sie gelten für Zehnteilung oder Fünfteilung des

groben Intervalls. Man geht in die vier Tafeln mit $D_{0,5}^{(\lambda)}$ und $\nu = 0{,}1 \,|\, 0{,}2 \,|\, \ldots \,|\, 0{,}9$ ein. Diese Tafeln reichen auch dann noch aus, wenn man noch die fünfte und sechste Differenz mitnimmt. Die fünfte Differenz wird nämlich durch eine kleine Änderung der dritten und die sechste durch eine kleine Änderung der vierten berücksichtigt. Von der dritten Differenz ist der neunte Teil der fünften abzuziehen und von der vierten Differenz der fünfte Teil der sechsten.

Hat man so die letzten Ziffern der einzuschaltenden Werte festgelegt, so bildet man aus ihnen in der gewöhnlichen Weise die Differenzenstaffel und erhält so die letzten Ziffern der Differenzen. Diese können durch Fehlerhäufung erheblich falsch werden. Das schadet aber nichts, weil es nicht mehr die Funktionswerte beeinflußt.

Alle vorangehenden Ziffern der Differenzen und der Funktionswerte bestimmt man dann genau nach Verfahren III, also von rechts nach links (d. h. beginnend bei der Differenz höchster Ordnung und ankommend beim Funktionswert), nicht wie bei der letzten Ziffer von links nach rechts. Nur braucht man jetzt keine Zusatzstellen mehr. Nachdem die letzte Ziffer für jeden Teilpunkt aller groben Intervalle festgelegt ist, kann die Summation auch über die Grenzen der groben Intervalle fortlaufen. Im Gegensatz zum Verfahren III braucht man nicht mehr für jedes grobe Intervall je eine feine Differenz von jeder Ordnung gesondert zu berechnen.

V.

Hat man die Comrieschen Tafeln nicht zur Hand, so kann man die Beiträge der groben Differenzen zur letzten Ziffer der einzuschaltenden Funktionswerte y_ν mit dem Rechenschieber auf folgende Weise bestimmen.

1. Man dividiere $II_0 + II_1$ durch 40 und schreibe den Quotienten in der Form

$$\frac{|II_0 + II_1|}{40} = 100\,m + (\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_0) + \frac{n}{40}$$

mit $m = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \ldots$; $n = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots \,|\, 39$. Mit $\mathfrak{z}$ (wie überhaupt mit deutschen Buchstaben) sei stets eine Ziffer $0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots \,|\, 9$ bezeichnet. $(\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_0)$ stehe abkürzungsweise für $\mathfrak{z}_1\, 10^1 + \mathfrak{z}_0\, 10^0$. Dann ist der dreiziffrige Beitrag Y_2 der zweiten Differenz zur letzten Stelle von y_ν

$$0{,}009 < |Y_2| = \alpha\, \mathfrak{z}_1 + \beta\, \mathfrak{z}_0 + \gamma \frac{n}{10} - 10\,\mathfrak{f} < 10\,,$$

$\mathfrak{f} = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots \,|\, 8$. Die Vorzahlen α, β, γ entnimmt man für die Teilpunkte $0{,}1 \,|\, 0{,}2 \,|\, \ldots \,|\, 0{,}9$ dem folgenden Täfelchen:

		α	β	γ	η
0,1	0,9	9	0,9	0,225	+ 0,6 −
0,2	0,8	6	1,6	0,400	+ 0,8 −
0,3	0,7	1	2,1	0,525	+ 0,7 −
0,4	0,6	4	2,4	0,600	+ 0,4 −
0,5	0,5	5	2,5	0,625	+ 0,0 −

Der errechnete Beitrag gilt als positiv, wenn II negativ ist. Bei positivem II empfiehlt es sich, den negativen Beitrag durch seine dekadische Ergänzung zu ersetzen (z. B. + 6,45 statt − 3,55).

2. Man bringe $III_{0,5}$ auf die Form

$$|\dot{III}_{0,5}| = m\, 10^4 + 10\, n + \mathfrak{z}\,, \qquad \begin{array}{l} m = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots\ldots \\ n = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots\ldots \,|\, 999 \end{array}$$

Für den Beitrag zur letzten Ziffer von y_ν bekommt man

$$|Y_3| = \eta \frac{n}{10} - 10\,\mathfrak{f}\,, \qquad \mathfrak{f} = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots\ldots \,|\, 7\,.$$

Unterhalb 0,5 gehe man bei negativem III, oberhalb 0,5 bei positivem III zur dekadischen Ergänzung über.

3. Man dividiere $IV_0 + IV_1$ durch 800 und schreibe den Quotienten in der Form

$$\frac{|IV_0 + IV_1|}{800} = (\ldots \mathfrak{z}_4 \mathfrak{z}_3 \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_0) + \frac{n}{800}\,, \qquad n = 0 \,|\, 1 \,|\, 2 \,|\, \ldots \,|\, 799\,.$$

Der dreiziffrige Beitrag Y_4 der vierten Differenz zur letzten Ziffer von y_ν ist dann gegeben durch

$$|Y_4| = \varkappa\, \mathfrak{z}_3 + \lambda\, \mathfrak{z}_2 + \mu\, \mathfrak{z}_1 + \nu\, \mathfrak{z}_0 + \varrho \frac{n}{100} - 10\,k\,, \qquad k = 0\,|\,1\,|\,2\,|\dots|\,21\,.$$

		$\varkappa$	λ	μ	ν	ϱ
0,1	0,9	0	3,5	1,35	3,14	0,392
0,2	0,8	0	6,0	7,60	5,76	0,720
0,3	0,7	5	3,5	7,35	7,74	0,967
0,4	0,6	0	6,0	9,60	8,96	1,120
0,5	0,5	5	7,5	3,75	9,38	1,172

Bei negativem IV gehe man zur dekadischen Ergänzung über. Gewöhnlich wird die Rechnung ziemlich einfach werden, weil von den Ziffern $\mathfrak{z}$ nur wenige nicht $= 0$ sein werden.

VI.

Das Comriesche Verfahren soll an unserm früheren Zahlenbeispiel vorgeführt werden. Wir haben nach 8stelliger Rechnung die Zwischenwerte nur 6stellig erhalten. Wir gehen daher jetzt sofort von 6stelligen Werten aus (Zahlentafel 3). Zunächst sind aus den groben

Zahlentafel 3.

x	$y = f(x)$	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
		+	—		+		—	—	+
0,8	0,817 813		14 884		1 386		243		
		65 388		— 1 627		+ 704		434	
0,9	0,883 201	114 266	16 510	— 1 165	2 089	+ 731	677	597	271
		48 878	32 558	+ 462	4 206	+ 27	1517	163	
1,0	0,932 079	81 707	16 048	+ 3 041	2 117	— 786	840		
		32 829		+ 2 579		— 813			
1,1	0,964 908		13 469		1 304				

Differenzen, die in der Zahlentafel 3 in der Zeile 0,95 stehen, die Endziffern der feinen Differenzen zu bestimmen.

Zahlentafel 4.

		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
I	+ 78	78	56	34	12	90	68	46	24	02
II	— 558	26	24	93	35	49	35	93	24	26
III	+ 459	28	37	32	18	0	82	68	63	72
IV	+ 4509	77	25	36	05	20	05	36	25	77
	Summe	19	52	05	80	69	00	53	46	87
		2	**5**	**1**	**8**	**7**	**0**	**5**	**5**	**9**

Von $I = 48878$ brauchen nur die beiden letzten Ziffern 78 beibehalten zu werden (Zahlentafel 4, zweite Spalte). Von $II = -32558$ werden Vielfache von 4000 abgestoßen, so daß -558 übrigbleibt. Ferner bekommt man

$$\begin{array}{rr} III = & 462 \\ -\frac{1}{9}\;V = & -\;3 \\ \hline & 459 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} IV = & 4206 \\ -\frac{1}{5}\;VI = & 303 \\ \hline & 4509 \end{array}$$

Zahlentafel 4 enthält die zweiziffrigen Beiträge der vier Differenzen zu den Endziffern der gesuchten Zwischenwerte, angegeben in Zehnteln (d. h. hier in Einheiten der 7. Dezimale). Diese Ziffernpaare schreibt man entweder aus den Comrieschen Tafeln ab oder bestimmt sie nach den Anweisungen unsers Abschnitts V. Die abgerundeten Spaltensummen sind die Endziffern der gesuchten 9 Zwischenwerte. Sie und ihre Differenzen stehen fettgedruckt in Zahlentafel 5. Ob man in einer Spalte abwärts oder aufwärts zu subtrahieren hat, erkennt man

aus dem Gang der groben Differenzen in Zahlentafel 3. Die um Null schwankenden 3. Differenzen sind als verschwindend zu erachten.

Nachdem die Endziffern feststehen, ist noch je eine feine Differenz aus jeder Spalte vollständig zu berechnen nach einem der unter III erwähnten Verfahren. Welche Werte wir dazu wählen (in welcher Zeile von Zahlentafel 5), ist an sich gleichgültig. Um später den Fortgang der Summation nicht zu unterbrechen, wählen wir am besten die Werte, die in der Zahlentafel 5 in den beiden Anfangszeilen 0,900 und 0,905 stehen (kursiv gedruckt). Diese Werte bestimmen wir am besten nach **Stirling** aus den groben Differenzen, die in Zahlentafel 3 in der Anfangszeile 0,9 des Intervalls stehen, nämlich nach folgenden Formeln:

Zahlentafel 5.

x	$y = f(x)$	I	II	III
		+	—	
0,90	*0,883 201*		*167*	
		5 641		—1
1	0,888 842		168	
		5 473		+1
2	0,894 315		167	
		5 306		—2
3	0,899 621		169	
		5 137		+1
4	0,904 758		168	
		4 969		+2
5	0,909 727		166	
		4 803		—2
6	0,914 530		168	
		4 635		+3
7	0,919 165		165	
		4 470		—1
8	0,923 635		166	
		4 304		+2
9	0,927 939		164	
		4 140		
1,00	*0,932 079*			

$$IV_{0,00} = \frac{IV_{0,0} - \frac{1}{6} VI_{0,0}}{10000},$$

$$III_{0,05} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(III_{-0,5} + III_{0,5}) - \frac{1}{4}(V_{-0,5} + V_{0,5})}{1000} + \frac{IV_{0,00}}{2},$$

$$II_{0,00} = \frac{II_{0,0}}{100} - 0{,}825 \frac{IV_{0,0} - 0{,}133\, VI_{0,0}}{1000},$$

$$I_{0,05} = \frac{I_{-0,5} + I_{0,5}}{20} + \frac{II_{0,00}}{2} - 0{,}825 \frac{(III_{-0,5} + III_{0,5}) - 0{,}2\,(V_{-0,5} + V_{0,5})}{100}$$

und erhalten

$$I_{0,05} = 5641, \qquad II_{0,00} = -167, \qquad III_{0,05} \approx 0, \qquad IV_{0,00} \approx 0.$$

Jetzt kann die Zahlentafel 5 durch Aufsummieren von rechts nach links vervollständigt werden, ebenso wie früher beim Verfahren III.

Das **Comrie**sche Verfahren der Untertafelung hat so große Vorzüge, daß es vermutlich die ältern Verfahren verdrängen wird. 450

Literatur.

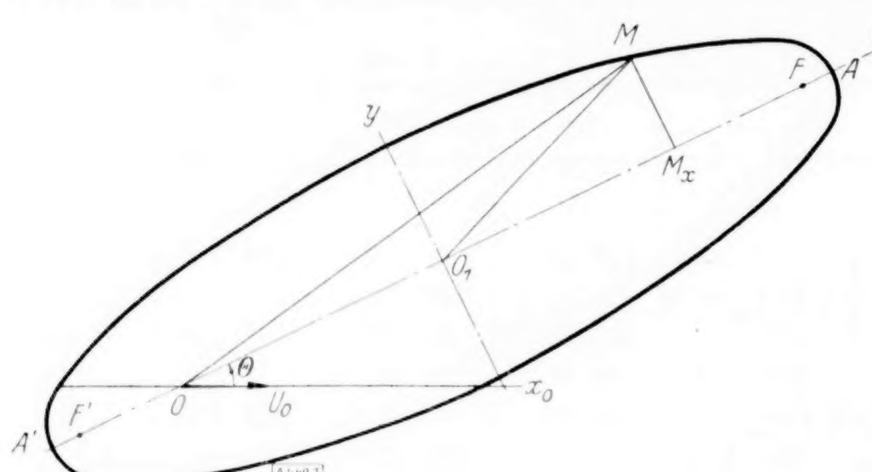
1) Lagrange: Werke V (Paris 1870), p. 676 ... 678 (von 1793).
2) F. G. Gauß: Fünfstellige Logarithmentafel, S. 148 ... 150.
3) R. Radau: Formules d'interpolation (Paris 1891, Gauthier-Villars).
4) H. L. Rice: Theory and practice of Interpolation (Lynn 1899, Nichols).
5) J. Bauschinger: Enzykl. d. math. Wiss. I D 3 Nr. 9, S. 182.
6) T. N. Thiele: Interpolationsrechnung (Leipzig 1909, Teubner).
7) K. Pearson: Tracts for computers No. II (Cambridge 1920, University Press).
8) E. T. Whittaker and G. Robinson: The calculus of observations (London 1924, Blackie and Son).
9) J. F. Steffensen: Interpolation (London 1927, Baillière, Tindall u. Cox).
10) M. Lindow: Numerische Infinitesimalrechnung (Berlin u. Bonn 1928, Dümmler).
11) L. J. Comrie: Monthly Not. R. Astr. Soc. 88, p. 455 (März 1928) und 91, p. 817 (Mai 1931).
12) L. J. Comrie: ebenda, 88, p. 507 (April 1928).
13) Interpolation Tables (London 1929, H. M. Stationery Office), Sonderdruck aus Nautical Almanac for 1931.
14) H. T. Davis: Tables of the higher math. functions, vol. I (Bloomington 1933, Principia press).
15) L. M. Milne-Thomson: Calculus of finite differences (London 1933 bei Macmillan).
16) L. J. Comrie: Nautical Magazine, Juli 1933, p. 9.
17) Nautical Almanac for 1935, p. 742 ... 749 und 851 ... 856 (auch als Sonderdruck erschienen).
18) W. O. Schumann: Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen (Berlin 1923, Springer), S. 192 u. 234.

Über die Kräfte auf einen elliptischen Zylinder, der sich in einer idealen Flüssigkeit bewegt.

Von *A. Ratib* in Istanbul.

Bei Betätigung eines Ruders (an einem Flugzeug) treten Momente auf, die zuweilen erhebliche Werte annehmen können. Wir wollen dieses Problem im folgenden untersuchen, wobei wir es in geeigneter Weise idealisieren.

Wir betrachten die ebene Bewegung einer inkompressiblen, idealen Flüssigkeit, die im Unendlichen ruht, und in der sich ein elliptischer Zylinder bewegt. Die Bewegung der Flüssigkeit sei wirbelfrei, doch soll eine Zirkulation um den Zylinder nicht ausgeschlossen sein. Der elliptische Querschnitt des betrachteten Zylinders drehe sich um einen Punkt 0 seiner großen Achse nach irgendeinem gegebenen Gesetz; diese Drehung braucht nicht gleichförmig zu sein. Der Drehpunkt 0 selbst bewege sich mit einer nach Größe und Richtung konstanten Geschwindigkeit U_0. In der Abbildung sei $0-x_0$ die gegebene Richtung dieser Geschwindigkeit. Zum Koordinatenanfang nehmen wir den Mittelpunkt 0_1 der Ellipse, x- und y-Richtung sollen in die große und kleine Achse fallen. Θ sei der Winkel zwischen der großen Achse und der festen Richtung $0-x_0$. Sind φ und ψ Potential- und Stromfunktion für die Bewegung der Flüssigkeit, so sind die x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens:



$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Im Unendlichen soll die Flüssigkeit ruhen, dort muß also $u = v = 0$ sein. Für einen Randpunkt M der Ellipse erhält man als Ausdruck der Tatsache, daß die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit verschwinden muß, die Randbedingung

$$\psi = U y - V x - \frac{\omega R^2}{2} + \text{const},$$

wo $U = U_0 \cos\Theta$, $V = -U_0 \sin\Theta$, $R = 0M$, $\omega = \dfrac{d\Theta}{dt}$ ist.

Wir führen jetzt elliptische Koordinaten $\zeta = \xi + i\eta$ ein, die mit x und y durch die Gleichungen:

$$x + iy = c\,\mathfrak{Cof}(\xi + i\eta) \quad \text{bzw.} \quad x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \cos\eta, \quad y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta$$

verknüpft sind; dabei ist $2c$ die Brennpunktsentfernung der Ellipse. Die Kurven $\xi = \text{const}$ sind Ellipsen, die Kurven $\eta = \text{const}$ konfokale Hyperbeln. Der Umriß des elliptischen Zylinders sei die Ellipse $\xi = \xi_0$.

Wenn man die klassische Lösung des einfachen Falles, wo sich die Ellipse um ihren Mittelpunkt 0_1 dreht, etwas abändert, so bekommt man das komplexe Strömungspotential für unseren allgemeineren Fall in der Form

$$\varphi + i\psi = -(Ub + iVa)\,e^{(\xi_0 - \zeta)} - \frac{i c^2 \omega}{4} e^{2(\xi_0 - \zeta)} + \frac{i\Gamma\zeta}{2\pi} - i\lambda a \omega\, e^{(\xi_0 - \zeta)}.$$

Hier sind $a = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0$ und $b = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0$ die Halbachsen der Ellipse, Γ ist die Konstante der Zirkulation um den Zylinder und $\lambda = \overline{0 0_1}$ ist die Entfernung des Drehpunktes 0 von dem Mittelpunkte 0_1 der Ellipse.

Um zu zeigen, daß der obige Ansatz die Bedingungen im Unendlichen und am Rande erfüllt, zerlegen wir ihn in reellen und imaginären Teil:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -(Ub\cos\eta + Va\sin\eta)\,e^{\xi_0 - \xi} - \frac{c^2\omega}{4}\sin 2\eta\, e^{2(\xi_0 - \xi)} - \frac{\Gamma\eta}{2\pi} - \lambda a \omega \sin\eta\, e^{\xi_0 - \xi} \\ \psi &= (Ub\sin\eta - Va\cos\eta)\,e^{\xi_0 - \xi} - \frac{c^2\omega}{4}\cos 2\eta\, e^{2(\xi_0 - \xi)} + \frac{\Gamma\xi}{2\pi} - \lambda a \omega \cos\eta\, e^{\xi_0 - \xi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Man sieht ohne weiteres, daß die Bedingung $u = v = 0$ im Unendlichen erfüllt ist. Am Rande der Ellipse soll nach Gl. (1) $\psi = Uy - Vx - \omega R^2/2 + \text{const}$ sein. Nun ist für einen Randpunkt M der Ellipse die Entfernung R von dem Drehpunkt 0 gegeben durch

$$R^2 = \lambda^2 + x^2 + y^2 + 2\lambda x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

was mit $x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 \cos\eta = a\cos\eta$, $y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 \sin\eta = b\sin\eta$ nach einfacher Umformung

$$R^2 = \lambda^2 + \frac{c^2}{2}\left\{\mathfrak{Cof}\,2\xi_0 + \cos 2\eta\right\} + 2\lambda a\cos\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

ergibt. Damit wird der am Rande vorgeschriebene Wert von ψ

$$\psi = U y - V x - \frac{\omega R^2}{2} + \text{const} = U b \sin\eta - V a \cos\eta$$

$$- \frac{\omega\lambda^2}{2} - \frac{c^2\omega}{4}\{\mathfrak{Cof}\,2\xi_0 + \cos 2\eta\} - \lambda a \omega \cos\eta + \text{const}.$$

Das stimmt mit dem aus (2) folgenden Werte (für $\xi = \xi_0$)

$$\psi = U b \sin\eta - V a \cos\eta - \frac{c^2\omega}{4}\cos 2\eta + \frac{\Gamma\xi_0}{2\pi} - \lambda a \omega \cos\eta$$

überein, wenn die in (1) freibleibende Konstante den Wert

$$\frac{\Gamma\xi_0}{2\pi} + \frac{\omega\lambda^2}{2} + \frac{\omega c^2}{4}\mathfrak{Cof}\,2\xi_0$$

erhält. Die Randbedingung an der Ellipse ist also erfüllt.

Um die Kräfte zu berechnen, die von der Flüssigkeit auf das Hindernis ausgeübt werden, insbesondere das Moment, kann man entweder die klassische Methode zur Bestimmung der Kräfte auf einen festen Körper in einer wirbelfrei bewegten, idealen Flüssigkeit anwenden, oder direkt die Formel von Bernoulli benutzen.

Erste Methode: Wir nehmen zunächst an, die Zirkulation sei Null. Ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit, T die kinetische Energie der Strömung pro Längeneinheit des Zylinders, so ist

$$2T = \varrho \iint \text{grad}^2 \varphi \, dx\, dy = -\varrho \int \varphi \frac{d\varphi}{dn} ds,$$

wo n die in die Flüssigkeit weisende Normale am Rande ist. Ist ds das Längenelement des elliptischen Umrisses, so wird $\dfrac{d\varphi}{dn} = \dfrac{d\psi}{ds}$, also $2T = \varrho \int \varphi\, d\psi$.

Nun kann man Potential- und Stromfunktion in der folgenden Formel schreiben:

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3$$

$$\psi = U\psi_1 + V\psi_2 + \omega\psi_3 .$$

Man erhält die Funktionen φ_i und ψ_i ohne weiteres aus den Formeln (2), indem man nach U, V und ω ordnet. Eine einfache Zwischenrechnung führt zu dem Ergebnis

$$2T = \pi\varrho b^2 U^2 + \pi\varrho a^2 V^2 + \pi\varrho\left(\frac{c^4}{8} + a^2\lambda^2\right)\omega^2 + 2\pi\varrho a^2\lambda V\omega$$

(siehe Lamb, § 121, p. 151).

Das Moment, welches pro Längenheit des Zylinders von der Flüssigkeit ausgeübt wird, ist

$$N = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) + V\frac{\partial T}{\partial U} - U\frac{\partial T}{\partial V}.$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt

$$\frac{N}{\pi\varrho} = \frac{c^2 U_0^2 \sin 2\Theta}{2} - \left(\frac{c^4}{8} + \lambda^2 a^2\right)\frac{d^2\Theta}{dt^2}.$$

Durch analoge Rechnung erhält man die Kraftkomponenten

$$\frac{X}{\pi\varrho} = -c^2 U_0 \sin\Theta \frac{d\Theta}{dt} + a^2\lambda\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{Y}{\pi\varrho} = c^2 U_0 \cos\Theta \frac{d\Theta}{dt} - a^2\lambda \frac{d^2\Theta}{dt^2}.$$

Zweite Methode. Formel von Bernoulli: Für bewegte Bezugsachsen und für unseren speziellen Fall nimmt die Bernoullische Druckgleichung die folgende Form an (siehe Lamb, § 20, p. 18):

$$\frac{p}{\varrho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{q^2}{2} + \omega \left\{ x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + F(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir setzen dabei voraus, daß keine äußeren Kräfte wirken; $F(t)$ ist eine willkürliche Funktion der Zeit. Ferner ist

$$q^2 = (u - U)^2 + (v - V)^2 .$$

Dann wird das Moment des Flüssigkeitsdruckes pro Längeneinheit des Zylinders durch das um die Ellipse herum zu nehmende Integral

$$N = \int (x\, p_y - y\, p_x)\, d s$$

geliefert, wo p_x und p_y die Projektionen des Druckes auf die x- und y-Richtung sind. Dies Integral wird in unserem Spezialfalle

$$N = \frac{1}{2} \int p_0 \frac{d}{d\eta} (R_0{}^2)\, d\eta ,$$

wo mit Hilfe von Formel (4)

$$p_0 = p(\xi_0, \eta)$$

und mit Formel (3)

$$R_0 = R(\xi_0, \eta)$$

einzusetzen ist. Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\frac{N}{\pi \varrho} = \frac{c^2 U_0{}^2 \sin 2\Theta}{2} - \left(\frac{c^4}{8} + \lambda^2 a^2 \right) \frac{d^2 \Theta}{d t^2} - \frac{\lambda \Gamma U_0 \cos \Theta}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wenn die Ellipse sich ohne Drehung parallel verschiebt und eine Zirkulation nicht auftritt, so ergibt sich

$$N = \frac{1}{2} \pi \varrho c^2 U_0{}^2 \sin 2\Theta .$$

Wenn die Rotation gleichförmig ist, verschwindet der mittlere Ausdruck in Formel (5).

Man kann die Zirkulation z. B. durch die Forderung bestimmen, daß am Ende der großen Achse der Ellipse die Geschwindigkeit zu null wird. Dadurch bestimmt sich Γ zu:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = U_0 a \sin \Theta - \left(\lambda a + \frac{c^2}{2} \right) \frac{d\Theta}{dt} .$$

Man sieht, daß man mit dieser oder einer gleichwertigen Hypothese eine Momentenformel bekommt, die sich zusammensetzt: 1. aus Ausdrücken, die von der Rotation nicht abhängen; 2. aus Ausdrücken, die in der Winkelgeschwindigkeit linear sind; 3. aus Ausdrücken, die in der Winkelbeschleunigung linear sind.

Um den Spezialfall der ebenen Platte zu erhalten, genügt es, in der Formel (5) $c = a$ zu setzen. Die Geschwindigkeit wird dann an beiden Kanten der Platte unendlich. Man kann über die Zirkulation Γ so verfügen, daß die Geschwindigkeit an einer der Kanten endlich bleibt. Soll sie (siehe Abb.) bei A oder bei A' endlich bleiben, so muß

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = a U_0 \sin \Theta - \left(\lambda + \frac{a}{2} \right) a \frac{d\Theta}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Gamma}{2\pi} = - a U_0 \sin \Theta + \left(\lambda - \frac{a}{2} \right) a \frac{d\Theta}{dt}$$

sein.

Es gibt einen Sonderfall, wo die Geschwindigkeit an beiden Kanten endlich bleibt. Dafür ist erforderlich, daß

$$\Gamma = -\pi a^2 \frac{d\Theta}{dt} \qquad \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2} e^{\frac{U_0}{\lambda}(t - t_0)}$$

ist, wo Θ_0 der Wert von Θ für $t = t_0$ ist.

Über eine spezielle Markoffsche Kette am Galtonbrett.

Von *H. Münzner.*

(Aus dem Institut für mathematische Statistik der Universität Göttingen.)

Das Galtonbrett wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Veranschaulichung der Binomialverteilung verwendet. Es handelt sich dabei um ein schräg aufgestelltes Brett, auf dem ein System von Stiften in horizontalen Reihen derart angeordnet ist, daß ein Netz von gleichschenkligen Dreiecken gebildet wird. In dieses Gitter von Stiften läßt man oben an einer bestimmten Stelle kleine Kugeln aus Stahl, Holz oder einem anderen Material laufen, die unter dem Einfluß der Schwere nach unten rollen und sich in den auf der unteren Seite des Stiftefeldes angebrachten Fächern sammeln. Die Kugeln müssen so groß sein, daß sie in jeder Stiftereihe auf einen der Stifte stoßen und sich dort entscheiden, ob sie in schräger Richtung rechts oder links von diesem Stift weiterrollen.

Ist die Wahrscheinlichkeit, nach rechts oder links zu fallen, für jede Kugel an jedem Stift gleich $\frac{1}{2}$, so werden, wenn s Reihen von Stiften vorhanden sind, in den $s+1$ in Frage kommenden Auffangfächern, die wir der Reihe nach mit $a=0, 1, 2 \ldots s$ bezeichnen wollen, gerade

$$N \cdot \varphi(a, s) = \frac{N\, s!}{a!\,(s-a)!}\left(\frac{1}{2}\right)^s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Kugeln zu erwarten sein. N bedeutet dabei die Gesamtzahl der benutzten Kugeln, und $\varphi(a, s)$ stellt die bekannte Binomialverteilung dar, die etwa von $s=12$ angefangen in recht guter Annäherung durch die Gaußverteilung

$$\varphi(a, s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-\frac{2\left(a-\frac{s}{2}\right)^2}{s}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ersetzt werden kann.

Bei zahlreichen praktischen Versuchen am Galtonbrett, die im Institut für mathematische Statistik zur Durchführung von Funktionaltransformationen[1]) ausgeführt wurden, ließ sich eine derartige Gaußkurve nicht genau erzielen, sondern es traten immer wesentlich flachere Kurven[2]) auf. Das gab zur Vermutung Anlaß, daß das Galtonsche Prinzip der gleichen Wahrscheinlichkeiten, die für das Rechts- oder Links-Hinunterrollen der Kugeln gelten sollten, in Wirklichkeit nicht erfüllt war.

Das Studium vieler Kugelbahnen, die von H. Bitterling mit Hilfe von berußtem Papier festgehalten wurden, ergab dann auch, daß die Kugeln eine größere Tendenz haben, die einmal eingeschlagene schräge Links- oder Rechtsrichtung beizubehalten, als diese Richtung zu wechseln, was sich leicht aus dem Beharrungsvermögen der Kugeln erklären läßt. Je flacher das Galtonbrett, das drehbar befestigt war, gestellt wurde, um so stärker war diese Tendenz des Beibehaltens der einmal eingeschlagenen Richtung.

Damit war offenbar das Wahrscheinlichkeitsschema, das zur regulären Bernoulliverteilung führt, gestört, und es ergab sich die Notwendigkeit, der Berechnung der Verteilungsfunktion $\psi(a, s)$, die sich unten in den Fächern bildet, ein anderes Wahrscheinlichkeitsschema zugrunde zu legen, bei dem der genannte Tatbestand berücksichtigt wurde.

P und Q seien die Wahrscheinlichkeiten für das Links- und Rechts-Hinunterfallen am ersten Stift, p sei die Wahrscheinlichkeit, daß die einmal eingeschlagene Richtung bestehen bleibt, und $q=1-p$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Richtungswechsel eintritt. Unter einmal eingeschlagener Richtung soll dabei nur die unmittelbar vorausgehende Richtung verstanden werden, von der allein die folgende Entscheidung abhängen soll, während wir keinen Einfluß von den früheren Richtungen her annehmen wollen. Auch soll das Springen der Kugeln über den linken oder rechten Nachbarstift hinweg vernachlässigt werden, da es bei den vorliegenden Versuchen verhältnismäßig selten eintrat.

Bezeichnen wir das Links-Hinunterfallen einer Kugel mit dem Ereignis 0, das Rechts-Hinunterfallen mit dem Ereignis 1, so sind P und Q die Anfangswahrscheinlichkeiten für die Ereignisse 0 bzw. 1, während die Wahrscheinlichkeit für 0 unter der Voraussetzung, daß unmittelbar vorher ebenfalls das Ereignis 0 eingetreten war, gleich ${}_0p_0 = p$ ist und die Wahrscheinlichkeit für 0, nachdem vorher das Ereignis 1 stattgefunden hat, gleich ${}_1p_0 = q$ ist. Entsprechend sind ${}_0p_1 = q$ und ${}_1p_1 = p$ definiert.

[1]) F. Bernstein: Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen, Ztschr. f. Phys., Bd. 77, 1932.

[2]) Über die gleiche Erfahrungen berichteten K. Odenhausen: (Ztschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht 1931) und W. Seitz mit K. Hamacher-Odenhausen (Physikalische Zeitschrift 35. Jahrg. 1934).

Wird die Summe sämtlicher Ereignisse bei s Versuchen mit a bezeichnet, so stellt die Wahrscheinlichkeit $\psi(a, s)$, daß bei s Versuchen gerade a eintritt, die gesuchte Häufigkeitsverteilung dar, die bei s Reihen in den $s+1$ Auffangfächern des Galtonbrettes zu erwarten ist, sofern der obige Ansatz den wirklichen Vorgängen entspricht.

Um die Wahrscheinlichkeit $\psi(a\,s)$ zu berechnen, zerlegen wir sie in die beiden Summanden $\psi_l(a, s)$ und $\psi_r(a\,s)$. Dabei sind $\psi_l(a, s)$ und $\psi_r(a, s)$ die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß eine Kugel bei s Reihen von links her bzw. von rechts her in das a-te Fach gerollt kommt. Für diese Wahrscheinlichkeiten gelten offenbar die Differenzengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \psi_l(a+1, s+1) &= p\,\psi_l(a, s) + q\,\psi_r(a, s) \\ \psi_r(a, s+1) &= p\,\psi_r(a, s) + q\,\psi_l(a, s) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

aus denen dann nach der bekannten Methode sich die erzeugenden Funktionen $F_e(x, y)$ und $F_r(x, y)$ herleiten lassen, deren Summe

$$F(x, y) = \sum_{a=0}^{s} \sum_{s=0}^{\infty} \psi(a, s)\, x^a\, y^s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

gerade die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\psi(a, s)$ erzeugt.

Für $P = Q = \frac{1}{2}$ lautet diese erzeugende Funktion

$$F(x, y) = \frac{1 - y(1+x)\left(\frac{p-q}{2}\right)}{(1 - x\,y\,p)(1 - y\,p) - q^2\,x\,y^2} \quad \ldots \ldots \ldots (5),$$

woraus sich durch Reihenentwicklung nach x und y die Wahrscheinlichkeit $\psi(a, s)$ sofort angeben läßt. Nach einfachen Umformungen ergibt sich dann:

$$\left.\begin{aligned} \psi(a, s) &= p^s \sum_{i=0} \left(\frac{q}{p}\right)^i \binom{a}{i} \binom{s-a}{i} \left[1 - \left(\frac{p-q}{2\,p}\right)\left(\frac{2\,s\,a - 2\,a^2 - i\,s}{a\,(s-a)}\right)\right] \text{ für } 0 < a < s \\ &= \frac{1}{2}\,p^{s-1} \quad \text{für } a = 0 \text{ und } a = s\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6).$$

Tabelle 1 enthält für $p = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95,\ 0{,}99$ und $0{,}999$ bei $s = 10$ die verschiedenen nach Formel (6) berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten mit 10000 multipliziert.

Tabelle 1[3]).

$a =$ / p	0 10	1 9	2 8	3 7	4 6	5
0,1	0	0	1	63	1680	6512
0,3	0	5	83	662	2391	3718
0,5	10	98	440	1172	2050	2460
0,7	202	469	835	1207	1490	1594
0,8	670	671	873	1040	1151	1190
0,9	1938	621	666	698	715	724
0,95	3151	402	409	413	416	418
0,99	4568	96	96	96	96	96
0,999	4955	10	10	10	10	10

Für kleine p haben wir steile glockenförmige Verteilungen, die mit wachsendem p immer flacher werden und schließlich in u-förmige Verteilungen mit einem Hügel in der Mitte übergehen, der immer niedriger wird und im Grenzfall $p = 1$, wo wir den 2-Kategorientyp haben, ganz verschwindet. Bei $p = 0{,}999$ läßt sich dieser Hügel auch noch nachweisen, wenn wir die Berechnung der Ordinaten auf neun Dezimalstellen vornehmen. Für $a = 1, 2 \ldots 9$ stimmen die ersten sieben Dezimalstellen alle überein und lauten 0,0009960, während für die achte und neunte Dezimalstelle sich ergab:

= 1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	07	12	15	16	15	12	07	00

Erst im Grenzfall $p = 1$ verschwindet dieser Hügel vollkommen.

[3]) Diese Tabelle stellt nur einen kleinen Auszug der umfangreichen numerischen Berechnungen dar, die von H. Patzer durchgeführt wurden.

Bei verschiedenen Anfangswahrscheinlichkeiten P und Q ergeben sich entsprechende schiefe Verteilungen.

Bei wachsendem s tritt der u-förmige Verteilungstyp immer mehr zurück, und wir erhalten schon für verhältnismäßig große p glockenförmige Verteilungen.

Von besonderem Interesse ist der Grenzfall $s \to \infty$. Wir können hier das Resultat sofort angeben, wenn wir beachten, daß das vorliegende Wahrscheinlichkeitsschema eine Markoffsche[4]) Kette mit der Grunddeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ q & p \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

darstellt. Lassen wir zunächst die Sonderfälle $p = 1$; 0,5; und 0 außer acht, so können wir ohne weiteres das allgemeine Markoffsche Resultat für derartige Wahrscheinlichkeitsverkettungen auf unsere spezielle Wahrscheinlichkeitskette übertragen. Markoff beweist, daß mit wachsendem s die Wahrscheinlichkeitsverteilung unabhängig von den Anfangsbedingungen gegen eine Gaußverteilung[5]) geht. Demnach gilt

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(a, s)}{\chi(a, s)} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

wobei

$$\chi(a, s) = \frac{1}{m\sqrt{2 s \pi}} e^{-\frac{(a - s\,a)^2}{2 m^2 s}}$$

ist und sich a und m aus dem Nenner $G(x, y)$ der erzeugenden Funktion $F(x\,y)$ (4) in folgender Weise ergeben:

$$a = \frac{[G_x'(x, 1)]_{x=1}}{[G_y'(1, y)]_{y=1}} \quad \text{und} \quad m^2 = \frac{[G_{uu}''(e^u, e^{-a u})]_{u=0}}{[G_y'(1, y)]_{y=1}} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Für unseren Spezialfall erhalten wir nach Formel (4):

$$G(x, y) = (1 - x\,y\,p)(1 - y\,p) - q^2\,x\,y^2$$

und daraus:

$$a = \frac{1}{2}; \qquad m^2 = \frac{p}{4\,q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Den Formeln (8) und (10) entnehmen wir nun das Ergebnis, das wir bei großen s angenähert für $\psi(a, s)$ die Gaußverteilung

$$\chi(a, s) = \sqrt{\frac{2\,q}{s\,\pi\,p}}\, e^{-\frac{2\,q\left(a - \frac{s}{2}\right)^2}{p\,s}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

setzen können.

Der Fall $p = \frac{1}{2}$ ist nunmehr auch in dieser Formel enthalten und ergibt die gewöhnliche Laplacesche Formel. Ist $p > \frac{1}{2}$, so erhalten wir flachere Gaußkurven, ist $p < \frac{1}{2}$, so entstehen steilere Gaußkurven. Bei $p = 0$ haben wir den Ein-Kategorientyp, bei $p = 1$ den Zwei-Kategorientyp, während bei $p = 1 - \varepsilon$, wobei ε eine auch noch so kleine feste Zahl bedeuten kann, schon Gaußverteilung vorhanden ist.

Man kann leicht zeigen, daß Formel (11) mit Ausnahme der Fälle $p = 0$ und $p = 1$ auch dann gültig ist, wenn die Anfangswahrscheinlichkeiten P und Q voneinander verschieden sind.

Das in den Formeln (6) bzw. (11) enthaltene theoretische Resultat wurde nun mit den wirklichen Vorgängen am Galtonbrett in folgender Weise verglichen.

An einem Galtonbrett, dessen Stifte in 18 Horizontalreihen in Form von gleichschenkligen Dreiecken von 1 cm Basis und 1 cm Höhe angeordnet waren, ließen wir von oben an einer bestimmten Stelle 1000 Stahlkugeln von 2,381 mm Durchmesser einlaufen. Die Neigung des Brettes betrug 20 Grad, sie wurde so gering gewählt, weil dadurch die Kugeln mehr die Tendenz hatten, in der einmal eingeschlagenen Richtung zu verharren und so ein größeres p erzielt werden konnte. Ferner war diese geringe Neigung nötig, um das von der Elastizität der Kugeln herrührende Springen über 1 oder 2 Stifte seitwärts hinweg auf ein Minimum zu reduzieren. Ganz vermeiden ließ sich jedoch dieses Springen nicht, so daß auch in die äußersten Randfächer, die nach der Theorie keine Kugeln mehr enthalten dürfen, einige Kugeln hineinfielen. Das Ergebnis des Versuchs, d. h. die Kugelanzahl in jedem einzelnen Fache ist in Spalte I der Tabelle 2 dargestellt. Spalte II enthält die Erwartungswerte

[4]) A. A. Markoff-H. Liebmann: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1912, S. 272 ff.
[5]) Von K. Mahler stammt für das Vorliegen von Gaußverteilung für den Grenzfall dieses Wahrscheinlichkeitsschemas ein direkter Beweis, der wegen seines Umfangs nicht veröffentlicht werden konnte.

und mittleren Fehler für diese Anzahlen bei Zugrundelegen der gewöhnlichen Bernoulliverteilung. Diese Werte weichen sehr stark von den empirischen ab. In Spalte III sind die Erwartungswerte nach der vorstehenden Theorie und ihre mittleren Fehler angegeben. Zur Berechnung dieser Erwartungswerte diente die Formel (6), wobei für die Wahrscheinlichkeit p die Größe 0,75 verwendet wurde. Dieser Wert 0,75 wurde empirisch durch Auszählung der Entscheidungen der Kugeln, deren Bahnen wir auf berußtem Papier festhielten, gewonnen. Bei einer Gesamtzahl von 294 Entscheidungen ergab sich 219mal ein Gleichbleiben der Richtung und 75mal ein Richtungswechsel, woraus wir $p = \frac{219}{294} \approx 0{,}75$ erhielten.

Die Übereinstimmung zwischen Spalte III und Spalte I ist sehr gut, fast immer liegen die empirischen Werte im Bereich des einfachen mittleren Fehlers um den theoretischen Wert. Spalte IV enthält zum Vergleich die nach der asymptotischen Formel berechneten Erwartungswerte für die einzelnen Ordinaten, die nicht mehr wesentlich von dem genauen Wert in Spalte III abweichen.

Tabelle 2.

Nummer des Faches	I empirische Werte	II Bernoulli-verteilung	III Markoffsche Kette (genaue Werte)	IV Markoffsche Kette (asympt. Formel)
— 10	4	—	—	2,7
— 9	5	0,0	3,8 ± 1,9	5,4
— 8	13	0,1	9,2 ± 3,0	10,2
— 7	23	0,6	18,2 ± 4,2	16,5
— 6	35	3,1 ± 1,8	31,0 ± 5,4	28,6
— 5	50	11,7 ± 3,4	45,8 ± 6,6	43,0
— 4	68	32,8 ± 5,6	63,1 ± 7,7	60,0
— 3	77	70,8 ± 8,1	79,6 ± 8,6	77,8
— 2	81	121,4 ± 10,3	93,5 ± 9,3	93,6
— 1	96	166,8 ± 11,8	102,8 ± 9,6	104,6
0	110	185,4 ± 12,3	106,0 ± 9,7	108,5
1	93	166,8 ± 11,8	102,8 ± 9,6	104,6
2	88	121,4 ± 10,3	93,5 ± 9,3	93,6
3	74	70,8 ± 8,1	79,6 ± 8,6	77,8
4	60	32,8 ± 5,6	63,1 ± 7,7	60,0
5	45	11,7 ± 3,4	45,8 ± 6,6	43,0
6	38	3,1 ± 1,8	31,0 ± 5,4	28,6
7	25	0,6	18,2 ± 4,2	16,5
8	8	0,1	9,2 ± 3,0	10,2
9	5	0,0	3,8 ± 1,9	5,4
10	2	—	—	2,7

Die gute Übereinstimmung zwischen der theoretisch und empirisch gefundenen Häufigkeitsverteilung zeigt, daß die wirklichen Vorgänge am Galtonbrett durch eine derartige Markoffsche Kette hinreichend genau erfaßt werden. Die Berücksichtigung weiterer systematischer Ursachen für die Abweichung von der gewöhnlichen Bernoulliverteilung hätte nur einen Sinn für Versuche mit sehr vielen Kugeln, weil dann die systematischen Abweichungen gegenüber den Zufallsschwankungen groß würden, während im vorliegenden Fall bei 1000 Kugeln die Zufallsschwankungen, die durch die mittleren Fehler charakterisiert sind, größer sind als möglicherweise vorhandene weitere systematische Abweichungen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß das vorliegende Wahrscheinlichkeitsschema zu denjenigen Wahrscheinlichkeitsschematen gehört, die zu dem sogenannten statistischen Ausgleich führen. Bei Erscheinungen, denen dieses Wahrscheinlichkeitsschema für den Fall $p < q$ zugrunde liegt, ist nämlich ein häufigerer Wechsel zwischen den Alternativereignissen zu erwarten als im gewöhnlichen Bernoullifall. Damit ist eine größere Häufigkeit der kleineren Iterationen und das Auftreten von steileren Häufigkeitsverteilungen verbunden; es sind also gerade die für den statistischen Ausgleich typischen Merkmale vorhanden. Damit soll nicht behauptet werden, daß die Beispiele von K. Marbe sich durch dieses Schema erklären lassen, sondern nur wieder einmal gezeigt werden, daß Marbes Lehre vom statistischen Ausgleich nicht die Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern lediglich die die Anwendung des Bernoullischemas erschüttert.

Die Ermittlung von Potentialströmungen durch ein experimentelles Verfahren.

Von *W. Barth* in Völklingen (Saar).

Die rechnerische Ermittlung von Potentialströmungen stößt in vielen Fällen auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Im folgenden soll eine experimentelle Methode zur Bestimmung der Potentialströmung beschrieben werden, die selbst verwickelte Aufgaben in einfacher Weise zu lösen gestattet.

Für eine Strömung durch geschichtete Stoffe gelten bei kleinen Reynoldsschen Zahlen zwischen dem Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ und den Komponenten der Geschwindigkeit c_x, c_y, c_z die Gleichungen[1])

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k\, c_x\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = k\, c_y\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = k\, c_z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo k eine die Durchlässigkeit charakterisierende Materialkonstante ist. Aus der Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

folgt dann

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

d. h. die Strömung ist eine Potentialbewegung; die Potentialflächen sind die Flächen gleichen Druckes. Diese Erkenntnis kann man dazu verwenden, um durch Messung des Druckes in geschichteten Stoffen die Potentialströmung zu bestimmen. Die Durchführung dieses Verfahrens soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Anläßlich einer Untersuchung über Strömungsvorgänge im Hochofen erschien es wünschenswert, den Verlauf einer idealen Strömung im Hochofengestell kennenzulernen.

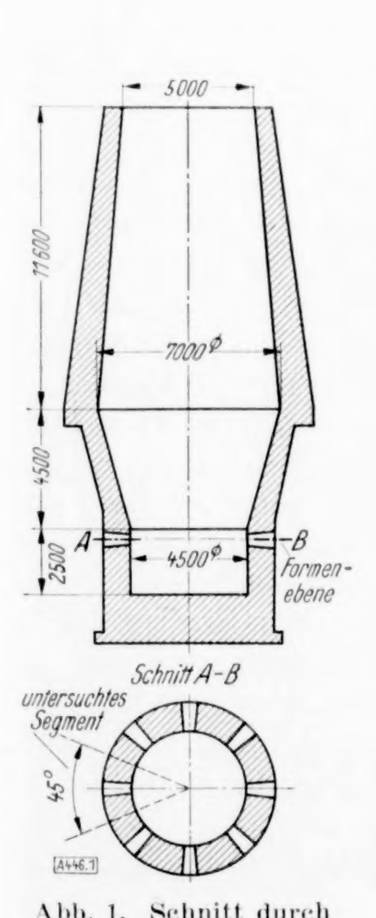


Abb. 1. Schnitt durch einen Hochofen.

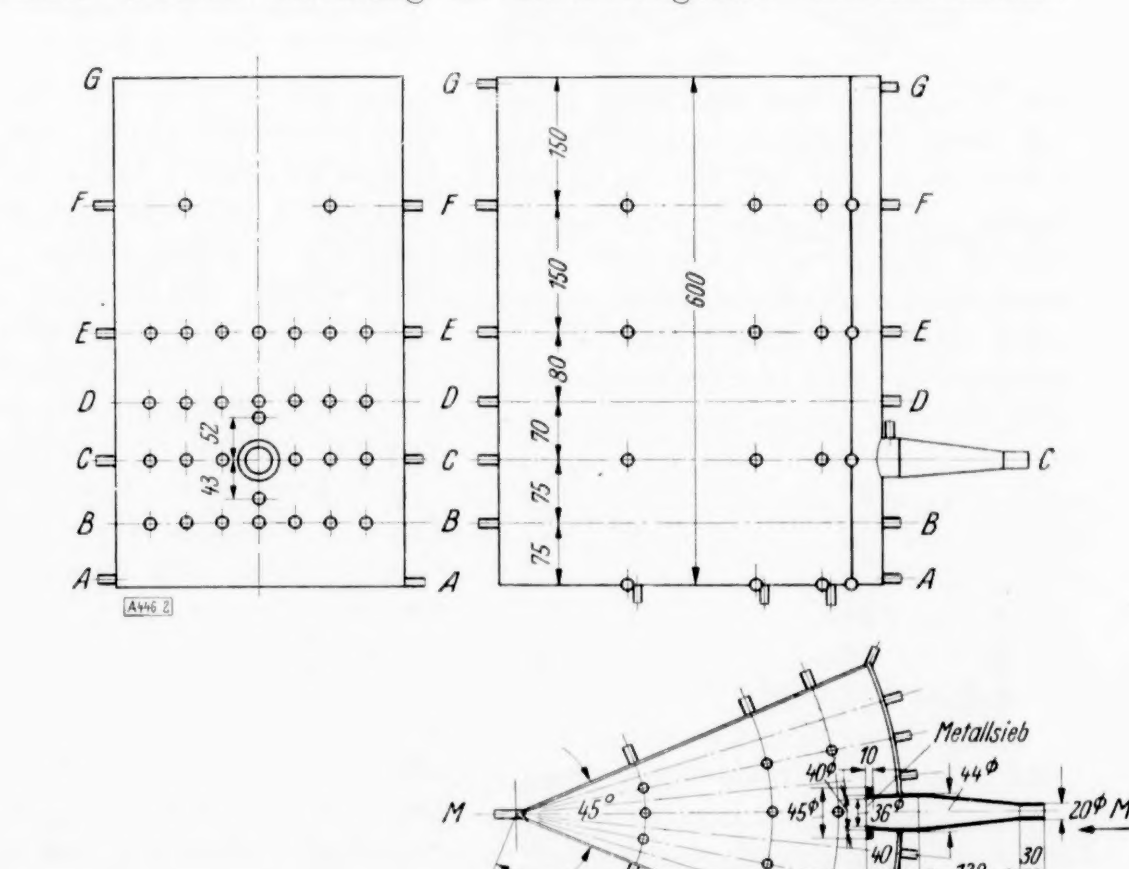


Abb. 2. Versuchsapparat.

[1]) W. Barth: „Der Druckverlust in geschichteten Stoffen." Forschung 1933, S. 83.

In Abb. 1 ist ein Schnitt durch einen Hochofen wiedergegeben. Den Unterteil des Ofens kann man als Rotationskörper auffassen, in welchen an mehreren Stellen — entsprechend der Zahl der Blasformen — Luft eingeblasen wird. Dieser Körper kann aus einer Anzahl gleicher Segmente zusammengesetzt gedacht werden, wobei aus Symmetriegründen in jedem Segment die Strömung ähnlich verlaufen muß. Man kann sich daher auf die Untersuchung eines Segmentes beschränken.

Dieses Segment wurde in Blech ausgeführt und ist in Abb. 2 dargestellt. Der Einfachheit halber wurde die Konizität des Ofens vernachlässigt. Das Gefäß wurde mit kugeligen Quarzkörnern von ca. 1 mm ⌀ (Normsand) gefüllt. Durch eine Düse, welche durch ein grobes Sieb abgeschlossen worden war, kann Luft abgesaugt oder eingeblasen werden. Die Luftmenge wurde durch eine Blende gemessen. Die Wandungen des Versuchsgefäßes waren an zahlreichen Stellen durchbohrt und mit Stutzen zum Anschluß eines mit Wasser gefüllten U-Rohres zur Messung des Druckes versehen. Zur Messung des Druckes im Innern wurde ein Messingröhrchen von 2 mm Außendurchmesser, welches an ein U-Glas angeschlossen worden war, durch eine Meßstelle in das Schüttgut eingeführt. Es kann dabei angenommen werden, daß durch das Einführen dieser Röhrchen die Druckverteilung nicht merklich gestört wird. Der Druck wurde an allen Stellen der Behälterwand und an ausgezeichneten Punkten im Innern des Materials ermittelt. Mit Hilfe dieser Werte können die Flächen gleichen Druckes durch Interpolation leicht bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 für die wichtigsten Schnittebenen zusammengestellt.

Abb. 3. Strömungsverlauf und Flächen gleichen Druckes (Potentialflächen.)

Aus dem Abstand der Druckflächen kann auf die Größe der Geschwindigkeit geschlossen werden. Zu diesem Zwecke muß der Druckabfall pro Längeneinheit für verschiedene Geschwindigkeiten bekannt sein. Diese Werte wurden experimentell ermittelt und sind in Abb. 4 zusammengestellt. Die Richtung der Geschwindigkeit kann mit Hilfe der Tatsache, daß die Stromlinien die Druckflächen senkrecht durchschneiden müssen, bestimmt werden. Da die Stromlinien selbst nur schwer darzustellen sind, wurden in Abb. 3 nur die Linien eingezeichnet, die durch Verbinden der Projektionen der Geschwindigkeiten in den einzelnen Schnittebenen entstehen.

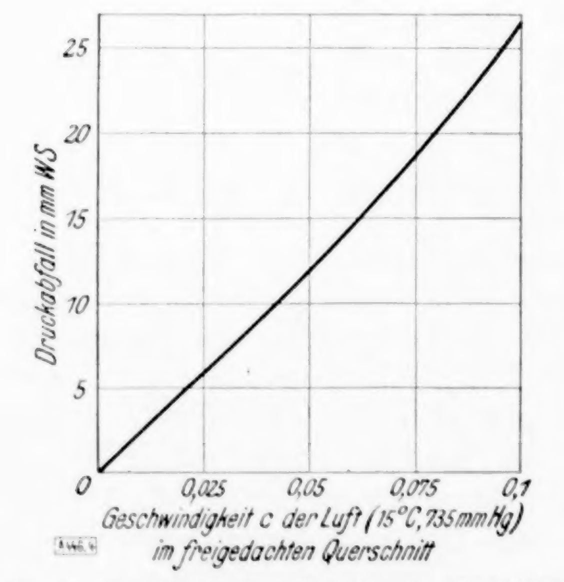


Abb. 4. Druckabfall pro 100 mm Schütthöhe in Quarzsand von ca. 1 mm Korngröße.

Die ermittelten Flächen entsprechen nur angenähert den Potentialflächen. Dies rührt daher, daß für den verwendeten Sand Gl. (1), wie aus Abb. 4 hervorgeht, in dem fraglichen Bereich nur angenähert gilt. Für die durchgeführte Untersuchung war diese Abweichung ohne Bedeutung, da für den vorliegenden Zweck nicht die Potentialströmung, sondern vor allem die Strömung bei größeren Reynoldsschen Kennziffern von Interesse war. In Fällen, in denen die Potentialflächen sehr genau festgestellt werden müssen, empfiehlt es sich, gegebenenfalls ein Füllmaterial zu wählen, dessen Korngröße kleiner ist (vgl. [1])). Beim Einfüllen des Sandes ist darauf zu achten, daß die Lagerung an allen Stellen gleich dicht ist, so daß der Widerstand des Füllmaterials an allen Stellen und nach allen Richtungen als gleich angenommen werden kann. Eine gleichmäßige Verdichtung kann evtl. durch Klopfen und Drehen erreicht werden. Randwertprobleme zweiter Art können dadurch gelöst werden, daß man an bestimmten Stellen Luft eintreten bzw. absaugen läßt, wie es der geforderten Geschwindigkeitsverteilung entspricht. Die beschriebene Methode läßt sich für die verschiedenartigsten Probleme verwenden und dürfte in fast allen Fällen die Bestimmung der Potentialströmung ganz erheblich erleichtern.

Zusammenfassung. Durch Messung der Druckverteilung in geschichteten Stoffen bei der Durchströmung von Luft wird die Potentialströmung ermittelt. 446

Vorträge der Hauptversammlung in Bad Pyrmont der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Von den auf der Versammlung in Bad Pyrmont vom 9. bis 14. September gehaltenen Vorträgen bringen wir im folgenden die von den einzelnen Vortragenden selbst zur Verfügung gestellten Vortragsauszüge. Die vollständige Veröffentlichung einzelner Vorträge bleibt vorbehalten.

Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie.

Von *W. Cauer* in Göttingen.

In der Elektrotechnik, besonders in der Nachrichtentechnik, hat die Konstruktion sogenannter reziproker Schaltungen praktische Bedeutung [1]). Hier soll der mathematische Kern der physikalischen Fragestellung herausgeschält werden, wobei sich herausstellen wird, daß eine enge Beziehung zwischen den topologischen Dualitätssätzen und unserem Problem, aber nicht einfach ein Spezialfall dieser Sätze vorliegt. Mittelbar geben die folgenden Überlegungen auch Aufschluß darüber, für welche Fachwerke ein Cremonascher Kräfteplan möglich ist [2]). Unter Beschränkung auf den interessanteren elektrischen Fall werde folgendes Reziprozitätstheorem zum Ausgangspunkt genommen: Mit jeder Funktion $f(\lambda)$ ($\lambda = i\,\omega$, ω Kreisfrequenz; z. B. $f(\lambda) = L\,\lambda + R + C^{-1}\,\lambda^{-1}$ für die Schaltung, Abb. 1) ist auch f^{-1} (z. B. Abb. 2) als komplexer Wechselstromwiderstand durch positive Schaltelemente — ohne Elektronenröhren — realisierbar. Das ist in dem Satz von O. Brune über die Natur der realisierbaren Funktionen $f(\lambda)$ enthalten [3]). Das genannte Reziprozitätstheorem gestattet noch Verallgemeinerungen; weitere

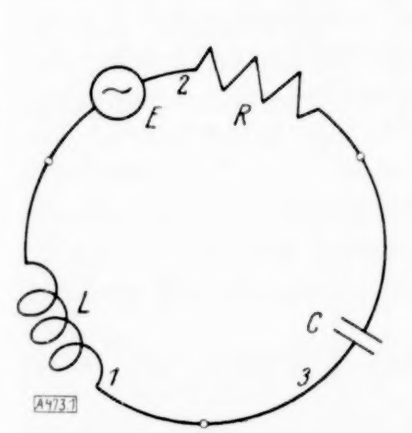


Abb. 1.



Abb. 2.

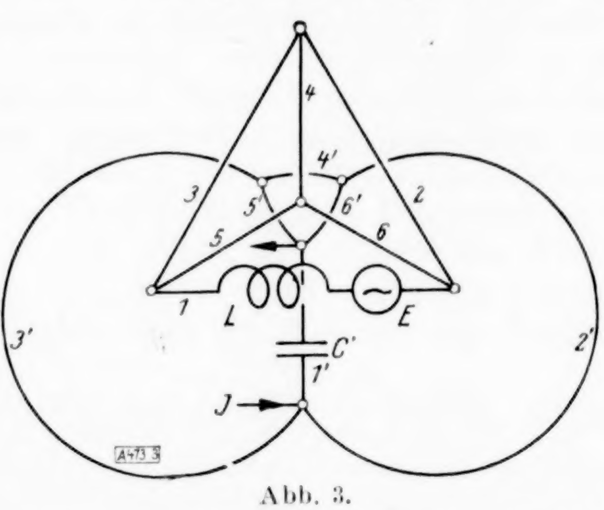


Abb. 3.

Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie haben jedoch keinen topologischen Inhalt. Wohlbekannt ist, wie man durch Vertauschung von „Reihe" und „parallel" und Ersetzen der in den Stromzweigen liegenden Elemente durch reziproke Elemente ($C' = L$, $R' = R^{-1}$, $L' = C$, z. B. Abb. 1 und 2) zu einer Schaltung eine Zweig für Zweig widerstandsreziproke („duale") erhält. Diese Konstruktion ist ein Spezialfall der folgenden am Beispiel der Wheatstoneschen Brücke (Tetraederkonfiguration, Abb. 3) erläuterten dualen Konstruktion. Man breite das elektrische Netzwerk ohne Überschneidung in die Ebene (auf die Kugelfläche) aus, wähle innerhalb jeder Masche einen Knotenpunkt der dualen Schaltung, verbinde diese Knotenpunkte so, daß gerade jede Verbindung einen Zweig der Ausgangsschaltung überschneidet und ordne je zwei sich überschneidende Zweige (Strecken) einander zu, derart, daß das Produkt der Widerstandswerte zugeordneter Zweige 1 ergibt (z. B. entspricht in Abb. 3 dem L in Zweig 1 das $C' = L$ in Zweig 1'). Daß diese Art dualer Konstruktion tatsächlich stets zu reziproken Wechselstromwiderständen führt, leuchtet physikalisch sofort ein, wenn man bedenkt, daß die Kirchhoffschen Knotenpunktsgleichungen der Ströme für die eine Schaltung ebenso lauten wie die Spannungsgleichungen der Stromkreise für die duale Schaltung und umgekehrt. Nun gibt es aber, was von Elektrotechnikern oft übersehen wird, Schaltungen (Streckenkomplexe), für welche diese duale Konstruktion versagt, z. B. der Streckenkomplex Abb. 4. Von der weiteren Komplikation, die durch das Auftreten gegenseitiger Induktionen entsteht, soll hier der Einfachheit halber abgesehen werden, obwohl der erwähnte grundlegende, von Brune bewiesene Satz nur richtig ist, wenn gegenseitige Induktionen zugelassen werden. Es erhebt sich die Frage: Welches sind die allgemeinsten Schaltungen, zu denen man auch der Struktur nach widerstandsreziproke (duale) konstruieren kann? Diese Frage ist äquivalent mit der folgenden: Für welche Schaltungen stimmen die Kirchhoffschen Knotenpunkts-

[1]) S. z. B. H. Bitter: Telegraphen- und Fernsprechtechnik 23, 1934, Nr. 3, S. 59 bis 65.
[2]) Wenn man den Cremonaschen Satz hinzunimmt, daß für jedes Fachwerk (einschl. Seilpolygon), welches sich als senkrechte Projektion eines Eulerschen Polyeders darstellen läßt, tatsächlich ein Cremonascher Kräfteplan existiert.
[3]) „Positive Funktionen", s. z. B. diese Zeitschrift X. 1931, S. 436 bis 437.

gleichungen der Zweigströme mit den passend geschriebenen Kirchhoffschen Kreisgleichungen der Zweigspannungen einer dualen Schaltung überein? Oder auch, wenn die nichtwesentliche Einschränkung auf zusammenhängende nichtzerfallende Streckenkomplexe gemacht wird: Welches ist die Klasse der Streckenkomplexe, die duale in dem Sinne haben (Definition der Dualität), daß die Inzidenzmatrix des Streckenkomplexes mit der Matrix einer passenden (nicht notwendig kleinsten) Basis der Zyklen des dualen Streckenkomplexes übereinstimmt. Denkt man sich in diese Zyklen Polygone eingespannt, so entsteht ein Flächenkomplex, von dem gefordert wird, daß seine zweite Inzidenzmatrix die gespiegelte der (ersten) Inzidenzmatrix des dualen Streckenkomplexes ist. Durch Berechnung der Eulerschen Charakteristik oder daraus, daß die Basiszyklen, also alle geschlossenen Ketten beranden (nullhomolog sind), folgt, daß der Flächenkomplex homöomorph einer Kugel (Eulersches Polyeder) ist. Von anderen möglichen Definitionen der Dualität von Streckenkomplexen[4]), ist folgende besonders bemerkenswert, da sie an die Kirchhoffsche kombinatorische Berechnungsweise zusammengesetzter Widerstände anknüpft und somit ebenfalls dem physikalischen Sachverhalt gerecht wird: Ein Streckenkomplex heiße dual zu einem anderen, wenn eine eindeutige Zuordnung zwischen den Strecken beider besteht, so daß jedem vollständigen Baum des ersten Komplexes ein System von unabhängigen Strecken des dualen Komplexes entspricht. Wie nach der ersten, so ist auch nach dieser Definition die Dualität eine wechselseitige. Vollständiger Baum eines gegebenen Streckenkomplexes (z. B. 4, 5, 6 in Abb. 3) heißt dabei ein System von Strecken, das keinen geschlossenen Kreis aufweist, das aber bei Hinzunahme irgendeiner weiteren Strecke einen geschlossenen Kreis erhält. Die Komplementärmenge eines Systems von Strecken, die einen vollständigen Baum bilden, heißt System unabhängiger Strecken (z. B. 1, 2, 3 in Abb. 3). Die Spannungen in den Zweigen (Strecken) eines vollständigen Baumes bestimmen, abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten, sämtliche Spannungen einer Schaltung, ebenso die Ströme eines Systems unabhängiger Zweige sämtliche Ströme. Durch vorwiegend kombinatorische Überlegungen in Verbindung mit dem Jordanschen Kurvensatz folgt, daß ein Streckenkomplex, der nach der letzten Definition

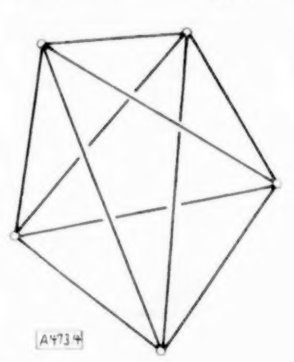


Abb. 4.

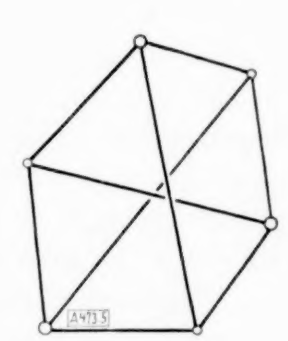


Abb. 5.

einen dualen Streckenkomplex gestattet, sich ohne Überschneidung auf die Kugel ausbreiten läßt und umgekehrt, in Übereinstimmung mit der ersten Definition der Dualität. Ein praktisches Kriterium, wann eine duale Konstruktion möglich ist, gibt ein Satz Pontrjagin und Kuratowski, nach dem es notwendig und hinreichend für die Ausbreitbarkeit eines Streckenkomplexes auf die Kugel ist, daß weder die Konfiguration Abb. 4 noch die Konfiguration Abb. 5 als Teilkomplex (mit Zulassung von Zwischen-Knotenpunkten) auftritt[5]). Für sämtliche Schaltungen lassen sich Zweig für Zweig widerstandsreziproke Konstruktionen angeben, wenn sogenannte ideale Transformatoren zugelassen werden. Gegenüber den Dualitätssätzen von Poincaré und Alexander handelt es sich bei der hier auftretenden Dualität nicht um eine duale Beziehung zwischen zwei Teilen ein und derselben Mannigfaltigkeit, sondern um eine Dualität zwischen zwei getrennten Komplexen. 473

Eine Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen.

Von *Lothar Collatz* in Berlin.

Bei dem zur numerischen Lösung von Differentialgleichungsproblemen angewendeten Differenzenverfahren stellt man der Differentialgleichung, indem man die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, ein System von Differenzengleichungen für Näherungswerte F der unbekannten Funktionswerte f an diskreten Stellen des Raumes, den

[4]) Eine von gemeinsamer Einbettung in eine Mannigfaltigkeit unabhängige Definition der Dualität gibt auch H. Whitney in Transactions Amer. Math. Soc. Bd. 34, Nr. 2, S. 339 bis 362.

[5]) Der hier interessierende Teil des mengentheoretisch bewiesenen Satzes von Kuratowski (Fundamenta Mathematicae Bd. 15 (1930), S. 271 bis 283) kann unter Benutzung einer rein kombinatorischen Definition der Dualität rein kombinatorisch bewiesen werden.

„Gitterpunkten" gegenüber. Es hat sich nun bei der großen Zahl der nach diesem Verfahren durchgerechneten Aufgaben gezeigt, daß das Verfahren bei großer Maschenweite h, also geringer Unbekanntenanzahl und relativ kurzer Rechnung, einen guten Überblick über den Verlauf der Lösungsfunktion gibt, daß aber das Verfahren bei Maschenverfeinerung nur langsam konvergiert. Braucht man genaue Näherungswerte F, so muß man sehr kleine Werte von h benutzen. Dabei steigt die Rechenarbeit stark an, und das Differenzenverfahren bleibt gegenüber anderen Lösungsmethoden nicht konkurrenzfähig.

Die Konvergenz läßt sich beschleunigen, wenn man die Differentialquotienten nicht durch Differenzenquotienten, sondern durch „finite Ausdrücke" ersetzt, die genauer mit den Differentialquotienten übereinstimmen als die Differenzenquotienten. So ist z. B. für fünfmal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + h^4 \frac{\vartheta_1}{18} \left|\frac{d^5 f}{dx^5}\right|_{\max \text{ in } (x-2h,\, x+2h)}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + h\,\frac{\vartheta_2}{2}\left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\max \text{ in } (x,\, x+h)}, \qquad |\vartheta_1| \leqq 1, \quad |\vartheta_2| \leqq 1.$$

Die Abweichung des erstgenannten finiten Ausdrucks vom Differentialquotienten geht bei Maschenverfeinerung mit der vierten Potenz von h gegen 0, die des Differenzenquotienten dagegen nur proportional h. Es ist daher beim Rechnen mit derartigen stärker approximierenden finiten Ausdrücken bei Übergang zu kleinerem h eine raschere Konvergenz zu erwarten, als beim Rechnen mit Differenzenquotienten, was sich in zahlreichen Fällen bestätigt hat.

Ist eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch eine lineare Differentialgleichung $L(f) = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von $m$ter Ordnung und durch lineare Randbedingungen festgelegt, so legen wir der Berechnung der Funktion f ein System von (nicht notwendig regelmäßig angeordneten) Punkten 1, 2, ..., p im n-dimensionalen Raum zugrunde. Die Aufgabe des Differenzenverfahrens ist die Bestimmung eines Systems von Näherungswerten $F_1, F_2, \ldots, F_p$ für die Werte $f_1, f_2, \ldots, f_p$ der Lösungsfunktion f an den Punkten 1, 2, ..., p. Für die F_i wird ein System linearer Gleichungen aufgestellt, von denen man eine so findet: Man greift einen der Punkte, etwa den Punkt j, heraus und bildet für ihn eine Summe der Gestalt $\sum_{\varrho=1}^{p} C_\varrho^{(j)} f_\varrho$. Jeder einzelne dieser p Summanden wird nach dem Taylorschen Satz entwickelt nach f und den partiellen Ableitungen von f an der Stelle j bis zu Gliedern $r$ter Ordnung $(r \geqq m)$; dann wird die Summe umgeordnet und zusammengefaßt nach f und den partiellen Ableitungen von f an der Stelle j. Diese Entwicklung wird verglichen mit $L(f_j)$, und die gliedweise Gleichsetzung der Koeffizienten der partiellen Ableitungen von f an der Stelle j liefert lineare Bestimmungsgleichungen für die noch verfügbaren Konstanten $C_\varrho^{(j)}$. Es gilt dann

$$\sum_{\varrho=1}^{p} C_\varrho^{(j)} f_\varrho - \text{Restglieder } (r+1)\text{ter Ordnung} = L(f_j) = t_j.$$

Dann soll $\sum_{\varrho=1}^{p} C_\varrho^{(j)} F_\varrho = t_j$ eine der Gleichungen für die F_i sein. Die Frage nach der Auflösbarkeit des Gleichungssystems für die $C_{\varrho(j)}$ erledigt der Satz: Es gibt zu einem beliebig vorgegebenen linearen Differentialausdruck $L(f)$ finite Ausdrücke $\sum_{\varrho=1}^{p} C_\varrho f_\varrho$ mit jedem gewünschten Approximationsgrad r. Für die meist gebrauchten Differentialausdrücke sind finite Ausdrücke höherer Approximation bereits von mir berechnet worden. Weitere Gleichungen für die F_i erhält man, indem man andere Systeme von Konstanten $C_\varrho^{(j)}$ verwendet, oder an Stelle des Punktes j andere Punkte bevorzugt, oder indem man die linearen Randbedingungen heranzieht.

Die Fehler $F_i - f_i$ der Näherungen F_i genügen einem Gleichungssystem mit derselben Koeffizientenmatrix wie bei dem Gleichungssystem für die Näherungen F_i selbst; es folgt hier allgemein aus der Möglichkeit, das Differenzenverfahren überhaupt anwenden zu können, schon die Möglichkeit, eine Fehlerabschätzung für das Verfahren durchzuführen, vorausgesetzt, daß die Lösungsfunktion genügend oft, nämlich $(r+1)$ mal partiell nach allen Variablen differenzierbar ist; Eindeutigkeit der Lösung braucht nicht vorausgesetzt zu werden.

Eine ausführlichere Darstellung werde ich demnächst veröffentlichen. 474

Spannungszustand durch Drillung in dünnwandigen Kastenträgern bei verhinderter Endwölbung.

Von *Hans Ebner* in Berlin-Adlershof.

Bei der Beanspruchung von Stäben mit nicht achsensymmetrischem Querschnitt durch ein Drillmoment ergibt sich bekanntlich eine Querschnittsverwölbung. Wird diese Verwölbung an irgendeiner Stelle des Stabes behindert, dann überlagert sich dem reinen Schubspannungszustand, der bei Drillung mit freier Querschnittswölbung entsteht, ein zusätzlicher Längs- und Schubspannungszustand, der in der Nähe des an der Wölbung behinderten Querschnitts von maßgebendem Einfluß sein kann.

Bei dünnwandigen Hohlstäben mit dem umschlossenen Querschnitt F_i und der Wanddicke d ergibt sich der Schubspannungszustand durch ein Drillmoment M bei freier Querschnittswölbung aus der Bredtschen Formel:

$$\tau = \frac{M}{2\,F_i\,d}.$$

Der bei verhinderter Endwölbung sich diesem Schubspannungszustand überlagernde Spannungszustand wird im folgenden für den Sonderfall des einseitig eingespannten Kastenträgers mit rechteckigem Querschnitt ermittelt. Der Kastenträger hat die Länge a, die Querschnittsseiten b und c; die entsprechenden Wanddicken sind d_b und d_c. Jede Längsscheibe hat ihr besonderes Koordinatensystem (Nullpunkt in Mitte der Querwandseiten am Einspannquerschnitt, Abszissenachse x in Längsrichtung, Ordinatenachse y bzw. z in Richtung der Querwandseiten b bzw. c).

Bei reiner Drillung findet eine Verwölbung des ganzen Kastens in der Weise statt, daß sich die 4 Eckpunkte eines vorher ebenen Querschnitts gegeneinander aus dieser Ebene verschieben, wobei die Querschnitte der einzelnen Längsscheiben zwischen den Eckpunkten eben bleiben. Diese geradlinige Verwölbung muß am eingespannten Ende durch Aufbringen eines Längsspannungszustandes rückgängig gemacht werden. Die Wirkung dieses Selbstspannungszustandes läßt sich durch eine Gruppe X von 4 gleichgroßen, abwechselnd entgegengesetzt gerichteten Längskräften in den Ecken des Kastenträgers ersetzen. Ist der Spannungszustand für die Kraftgruppe $X = 1$ ermittelt, so kann die statisch unbestimmte Größe X mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen aus der Bedingung verschwindender Verwölbung am Einspannquerschnitt berechnet werden.

In den einzelnen Längsscheiben wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt. Die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen für die Scheibenelemente sind erfüllt, wenn die Spannungen als Ableitungen der Airyschen Spannungsfunktion F gewonnen werden, wobei F der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügen muß. Außer dem Gleichgewicht am Element muß Gleichgewicht der einzelnen Längsscheiben vorhanden sein. Da bei Wirkung der Längskraftgruppe $X = 1$ von den Endquerwänden auf die Längswände der Randkräfte $b/2a$ bzw. $c/2a$ übertragen werden, müssen die Resultierenden der Schubspannungen im Querschnitt der Längswände mit diesen Randkräften übereinstimmen.

Außerdem sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

1. Am eingespannten Rand $x = 0$ muß der Querschnitt der einzelnen Längsscheiben eben bleiben.
2. Am freien Rand $x = a$ muß die Längspannung σ_x verschwinden.
3. An den Längsrändern müssen die in Querrichtung auftretenden Spannungen σ_y bzw. σ_z verschwinden.
4. Die Randdehnungen ε_x der Längsscheiben müssen an den Längsrändern übereinstimmen; da dort $\sigma_y = \sigma_z = 0$, kann dafür auch die Bedingung gleicher Randspannungen σ_x gesetzt werden.
5. Die Schubbelastungen $\tau \cdot d$ der Längsscheiben müssen am gemeinsamen Rand gleich sein.

Die ersten beiden Randbedingungen werden im Ansatz der Spannungsfunktion berücksichtigt, die drei letzten werden zur Bestimmung der in der angesetzten Spannungsfunktion noch enthaltenen Konstanten benutzt. Die in dieser Weise erhaltene Spannungsfunktion lautet dann z. B. für die Längsscheibe b:

$$F = A_b\,x\,y + \sum_1^{\infty} D_m\,[B_m\,\mathfrak{Sin}\,k_m\,y + y\,\mathfrak{Cof}\,k_m\,y]\cos k_m\,x$$

mit

$$A_b = \frac{1}{2\,a\,d_b}\,; \qquad B_m = -\,b_1\,\mathfrak{Cotg}\,k_m b_1\,; \qquad D_m = \frac{1}{k_m^{\,3}\,a^2\,[b_m d_b + c_m d_c]\,\mathfrak{Sin}\,k_m b_1}\,.$$

Daraus ergibt sich dann für die Längsscheibe b infolge $X = 1$ der Spannungszustand:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{b_1}{a}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\mathfrak{Cotg}\,k_m b_1}{b_m d_b + c_m d_c}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,k_m y}{\mathfrak{Sin}\,k_m b_1} - \frac{y}{b_1}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k_m y}{\mathfrak{Cof}\,k_m b_1} - \frac{2}{k_m b_1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,k_m y}{\mathfrak{Cof}\,k_m b_1}\right]\cos k_m x\,,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = +\frac{2}{\pi}\,\frac{b_1}{a}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\mathfrak{Cotg}\,k_m b_1}{b_m d_b + c_m d_c}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,k_m y}{\mathfrak{Sin}\,k_m b_1} - \frac{y}{b_1}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k_m y}{\mathfrak{Cof}\,k_m b_1}\right]\cos k_m x\,,$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{2\,a\,d_b} - \frac{2\,b_1}{\pi\,a}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\mathfrak{Cotg}\,k_m b_1}{b_m d_b + c_m d_c}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,k_m y}{\mathfrak{Sin}\,k_m b_1} - \frac{y}{b_1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,k_m y}{\mathfrak{Cof}\,k_m b_1} - \frac{1}{k_m b_1}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k_m y}{\mathfrak{Cof}\,k_m b}\right]\sin k_m x\,.$$

Darin ist:

$$b_m = \frac{\dfrac{1}{2\,k_m b_1}\,\mathfrak{Sin}\,2\,k_m b_1 - 1}{\mathfrak{Cof}\,2\,k_m b_1 - 1}\,b_1\,; \qquad c_m = \frac{\dfrac{1}{2\,k_m c_1}\,\mathfrak{Sin}\,2\,k_m c_1 - 1}{\mathfrak{Cof}\,2\,k_m c_1 - 1}\,c_1\,;$$

$$k_m = \frac{m\,\pi}{2\,a}\,, \quad (m = 1, 3, 5 \ldots\ldots)\,; \qquad b_1 = \frac{b}{2}\,, \qquad c_1 = \frac{c}{2}\,.$$

Der Spannungszustand in der Längsscheibe c ergibt sich entprechend.

Mit dem Spannungszustand $X = 1$ kann jetzt die statisch unbestimmte Größe X aus der Elastizitätsbedingung bestimmt werden, daß die gegenseitige Verschiebung der Eckpunkte des Einspannquerschnitts infolge des Zustandes X entgegengesetzt gleich der entsprechenden Verschiebung infolge des Drillmomentes M bei unbehinderter Querschnittswölbung sein muß. Die Eckverschiebungen infolge $X = 1$ erhält man am zweckmäßigsten mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wobei die Arbeit der von den Spannungen an den entsprechenden Dehnungen für die Gesamtheit der Scheibenelemente aufzustellen ist. Näherungsweise kann die Bestimmung der Eckverschiebungen infolge $X = 1$ unter der Annahme linearer Verteilung der Längsspannungen erfolgen. Bei der Berechnung eines Kastenträgers mit praktisch vorkommenden Abmessungen ergab sich bei dieser Näherung die statisch Unbestimmte rd. 10 v. H. zu groß.

Der allgemeinere Fall des auf Drillung beanspruchten Kastenträgers mit Zwischenquerwänden und beliebigen an den Querwänden angreifenden Drehmomenten wurde unter der Annahme linearer Verteilung der Längsspannungen in einer in der ZFM 1933, Heft 23 und 24 veröffentlichten Arbeit untersucht. 487

Zerreißversuche an Flachstäben mit ebener Formänderung.

Von *H. Fromm* in Danzig.

Die Erforschung der Werkstoffeigenschaften drängt dazu, auch für plastische Stoffe die „technische Kohäsion" zu ermitteln, d. h. die Normal- oder Schubspannungen, welche zu einem Reiß- bzw. Scherbruch führen. Bei Zerreißversuchen an Rundstäben kann man aus Kraft und engstem Querschnitt der Einschnürung eine mittlere Bruchspannung errechnen. Die Einschnürung bedingt jedoch wie eine Kerbe eine ungleichmäßige Spannungsverteilung, und zwar kann man einsehen, daß im plastischen Zustand die größte Spannung in der Mitte und die kleinste am Rande herrscht. Dies Ergebnis findet durch einen bekannten Versuch von Ludwik[1]) seine Bestätigung. Die Ermittlung der Kohäsion fordert die Kenntnis dieser größten Spannung.

Für das ebene Problem ist die Lösung dieser Aufgabe weitgehend vorbereitet. Auf Grund der Henckyschen[2]) Sätze über Gleitliniennetze hat Prandtl[3]) eine graphische Konstruktion des Netzes aus zwei gegebenen Gleitlinien angegeben, und mit Hilfe der von Caratheodory und Schmidt[4]) gegebenen analytischen Behandlung hat Schapitz[5]) gezeigt,

[1]) P. Ludwik: Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. **71**, 1927, S. 1532.
[2]) H. Henky: ZAMM **3**, 1923, S. 241.
[3]) L. Prandtl: ZAMM **3**, 1923, S. 401.
[4]) C. Caratheodory u. E. Schmidt: ZAMM **3**, 1923, S. 468.
[5]) E. Schapitz: Ing. Arch. **4**, 1933, S. 227.

daß das Netz durch eine freie Oberfläche völlig bestimmt ist, und hat diese Randwertaufgabe gelöst. Davon benutzen wir folgende Ergebnisse: 1. Zwei von den Endpunkten A und B eines einsinnig um den Winkel φ gekrümmten Randstückes ausgehende Gleitlinien krümmen sich bis zu ihrem Schnittpunkt C entgegengesetzt um den gleichen Winkel $\vartheta = \varphi/2$ (Abb. 1). 2. Eine von einem Wendepunkt des Randes ausgehende Gleitlinie schneidet die Gleitlinien der anderen Schar in Wendepunkten. Daraus folgt für die Einschnürung wegen ihrer doppelten Symmetrie, daß die Gleitlinien durch den engsten Querschnitt vom konkaven Teil des Randes ausgehen und daß ihr Krümmungswinkel ϑ dem Winkel zwischen entsprechender Randtangente und Stabachse gleich ist (Abb. 2). Die Gleitlinie vom Wendepunkt des Randes geht also durch die Querschnittsmitte, der somit der größte Winkel $\vartheta_{\max}$ zukommt. Es ist dies ge-

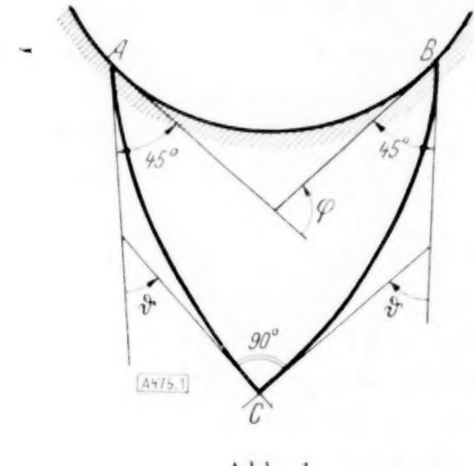


Abb. 1.

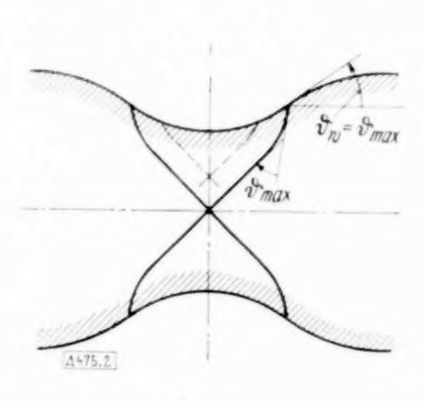


Abb. 2.

wissermaßen das Gesetz, nach dem sich die Form des Randes in Anpassung an die Dicke im engsten Querschnitt ausbildet. 3. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 in der Netzebene wachsen vom Rande aus mit ϑ je um $2k\vartheta$, wo $2k = \sigma_1 - \sigma_2$ die konstant vorausgesetzte Hauptspannungsdifferenz ist. Am Rand ist nun mit $\sigma_2 = 0$ überall $\sigma_1 = \sigma_R = 2k$, und im engsten Querschnitt gilt daher

$$\sigma_1 = (1 + \vartheta) \cdot \sigma_R ; \qquad \sigma_2 = \vartheta \cdot \sigma_R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Es bestätigt sich also, daß die größte Spannung in der Mitte liegt, sie ist

$$\sigma_{\max} = (1 + \vartheta_{\max}) \cdot \sigma_R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1\,a).$$

Die Voraussetzung der Henckyschen Sätze: $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ kann in verschiedener Weise physikalisch bedingt sein: Sie kann erfüllt sein, wenn bei ebenem Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$) die Mohrsche Fließbedingung gilt, daß die größte Hauptspannungsdifferenz gleich $2k$ ist. Dazu müssen aber σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen haben. In der Einschnürung ist nun der Rand konkav, also müßte ϑ (wie in Abb. 2) positiv, also nach (1) σ_1 **und** σ_2 positiv sein; d. h. die ganzen Überlegungen gelten hier nicht. In der Tat treten auch bei dünnen breiten Flachstäben schräg durch den Stab verlaufende Einschnürungen auf, die mehr zu einer Beziehung $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ passen. — Die Henckysche Voraussetzung ist aber stets bei ebener Verzerrung erfüllt, wenn dazu die v. Misessche Fließbedingung und Fließregel gilt. Für diesen Fall gelten also die Gleichungen (1) und (1a). Es genügt z. B. eine Messung des Wendetangentenwinkels $\vartheta_{\max}$, um $\sigma_{\max}/\sigma_R = 1 + \vartheta_{\max}$ zu finden. Hat man die ganze Randkurve von einem Versuch aufgenommen, so läßt sich das Gleitliniennetz zeichnen und damit die Spannungsverteilung ermitteln. Mit der mittleren Spannung σ_M im engsten Querschnitt f ist dann die Zugkraft $P = \sigma_M\, f = \int \sigma_1\, df = \sigma_R \cdot \int (1 + \vartheta)\, df$, also nach (1a)

$$\sigma_{\max} = \frac{(1 + \vartheta_{\max}) \cdot f}{\int (1 + \vartheta)\, df} \cdot \sigma_M \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Spannungsverteilung kann man mit guter Näherung nach einer Parabel annehmen [6]). Dann ist

$$\sigma_{\max} = \frac{1 + \vartheta_{\max}}{1 + \frac{2}{3}\vartheta_{\max}} \cdot \sigma_M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2\,a).$$

Diese Ergebnisse setzen homogenen Stoff voraus. Verfestigung macht sie nicht ungültig, solange sie homogen ist und die v. Misesschen Annahmen bestehen läßt. Gerade in der Einschnürung ist aber die Verfestigung nicht homogen, sondern in der Mitte erheblich stärker als am Rande, so daß die Henckyschen Sätze nicht mehr gelten. Das Gleitliniennetz sieht anders aus und (1) liefert zu kleine Werte, wenn ϑ jetzt den Tangentenwinkel des Randes

[6]) Vgl. Fußnote 7.

bedeutet, der einem Querschnittspunkt durch seine Gleitlinie zugeordnet ist. Da nun Verfestigung und ϑ beide nach der Mitte des Querschnitts hin wachsen, so wird man die Verfestigung in erster Näherung dadurch berücksichtigen können, daß man in (1) ϑ durch $n\,\vartheta > \vartheta$ ersetzt. So folgt aus (2a)

$$\sigma_{\max} = \frac{1 + n\,\vartheta_{\max}}{1 + \frac{2}{3}\,n\,\vartheta_{\max}} \cdot \sigma_M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Um nun diese Möglichkeit zur Abschätzung der größten Spannung und damit der technischen Kohäsion auszunutzen, hat Herr Baranski auf meine Anregung im Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Berlin Zerreißversuche mit ebener Formänderung ausgeführt. Flachstäbe von 8 mm Dicke und bis zu 100 mm Breite wurden in der Zerreißmaschine gedehnt, wobei die Breite dadurch unveränderlich erhalten wurde, daß die längsverlaufenden Ränder durch T-Flansche verstärkt und durch dazwischen gebaute Querstützen an der gegenseitigen Annäherung verhindert wurden[7]). Daß die Formänderung mit guter Vollkommenheit eben war, konnte mehrfach geprüft werden: 1. Ein aufgeritztes Quadratnetz ging in ein Rechtecknetz über, wobei die Längsrisse ihren Abstand von 5 mm beibehielten, auch im Tal der Einschnürung, welches senkrecht zur Zugrichtung geradlinig über die ganze Breite verlief. 2. Denselben Verlauf zeigt auch der Bruch, der bei Messing 63 (ebenso wie beim Rundstab) ein Scherbruch ist, während bei Mn-Si-Stahl „Böhler ES" in der Mittelzone ein Reißbruch ansetzt, dem ein Scherbruch in den Außenteilen des Querschnitts folgt (genau wie beim Rundstab). Der Bruch beginnt in der Mitte des Tales und läuft im Tal dem Flanschen zu; daher ist die für den Bruch gemessene Spannung wirklich die den ebenen Bruch erzeugende Spannung. 3. Laufend mit einem besonderen Gerät durchgeführte Dickenmessungen über die ganze Länge und Breite des Stabes ließen eine gleichmäßig verteilte Wellung erkennen, wie sie auch an Rundstäben[8]) als Folge der Inhomogenität des Stoffes beobachtet wurde. Wie an Rundstäben konnte auch hier die allmähliche Entstehung der ebenen Einschnürung messend verfolgt werden, wobei sich im wesentlichen die von Schapitz gefundenen Ergebnisse wiederholen lassen. 4. Die unten beschriebene Art der Spannungsermittlung liefert eine weitere Probe für die Ebenheit der Formänderung.

Bei dem Böhlerstahl ergab sich nun nach dem Bruch ein Wendetangentenwinkel von $\vartheta_{\max} \approx 0{,}24$ ($\approx 14^0$). Ohne Beachtung der Verfestigung würde also nach (1a) und (2a)

$$\sigma_{\max} = 1{,}24 \cdot \sigma_R = 1{,}07 \cdot \sigma_M\,,$$

d. h. die technische Reißkohäsion würde nur etwa 7% über der über den Querschnitt gemittelten Spannung liegen. Demgegenüber wird man also den Einfluß der Verfestigung nicht vernachlässigen dürfen, der für den vorliegenden Fall ungefähr richtig geschätzt sein dürfte, wenn man in (3) $n = 1{,}5$ setzt. So wird

$$\sigma_{\max} \approx 1{,}36 \cdot \sigma_R \approx 1{,}1 \cdot \sigma_M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Bei Messing 63 sind die Unterschiede noch geringer. — Selbst wenn $n \cdot \vartheta_{\max} = 1$ würde, wäre erst $\sigma_{\max} = 1{,}2 \cdot \sigma_M$. Nun ist nicht zu erwarten, daß die Spannungsverteilung beim Rundstab sehr viel ungleichmäßiger ist. Man kann daher die Reißkohäsion um etwa 10% höher als die gemittelte Spannung schätzen, wenn Reißbruch vorliegt, und die Scherkohäsion bei Scherbruch zu etwa $0{,}55 \cdot \sigma_M$.

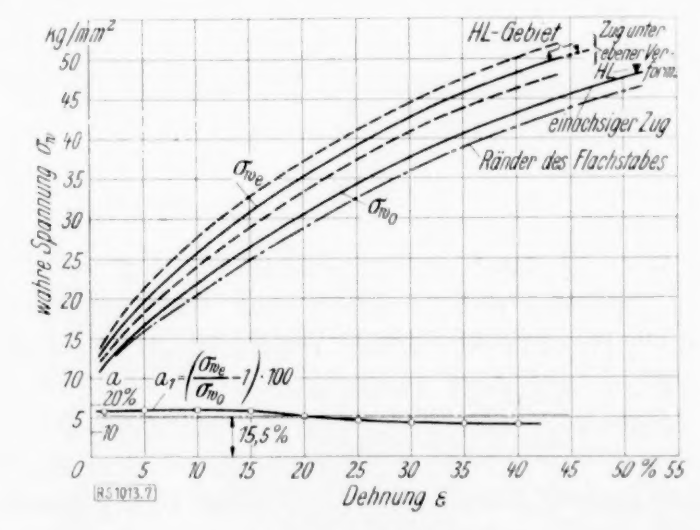




Abb. 3. Messing.

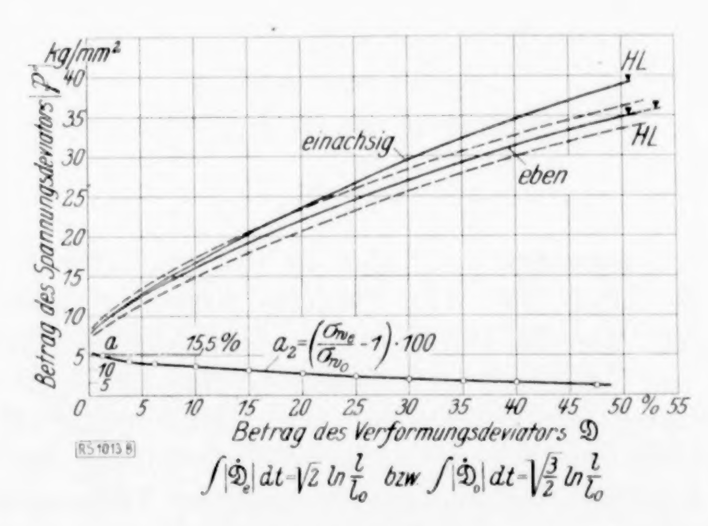


Abb. 4. Messing.

[7]) Über die Entwicklung der günstigsten Stabform, die Versuchseinrichtung und die Versuchsergebnisse vgl. die Dissertation von G. Baranski, Zeitschr. f. Metallkunde **26**, 1934, S. 173.

[8]) Vgl. die im gleichen Institut durchgeführten Versuche von E. Schapitz: Zeitschr. f. Physik **70**, 1931, S. 641.

Um die absolute Größe der Spannungen zu bestimmen, wurde für mehrere Stäbe von verschiedener Breite, aber genau gleicher Randversteifung, die Zugkraft in Abhängigkeit von der Dehnung gemessen. Die Kraftdifferenz für gleiche Dehnung verschiedener Stäbe ist die auf die Breitendifferenz entfallende Kraft zur ebenen Verformung; Division durch Breitendifferenz und Dicke gibt die gemittelte Spannung. Ihre Auftragung über der Dehnung liefert eine Darstellung der Verfestigungskurve (Abb. 3). Andere Darstellungen ergeben sich durch Auftragung der Intensität[9]) des Spannungsdeviators über der des Verzerrungsdeviators (Abb. 4) oder über der plastischen Arbeit (Abb. 5). In diesen letzten Auftragungen fand **Schmidt**[10])

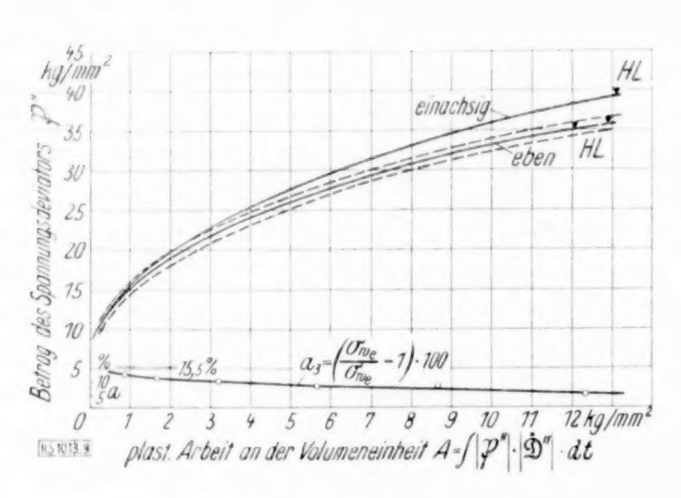


Abb. 5. Messing.

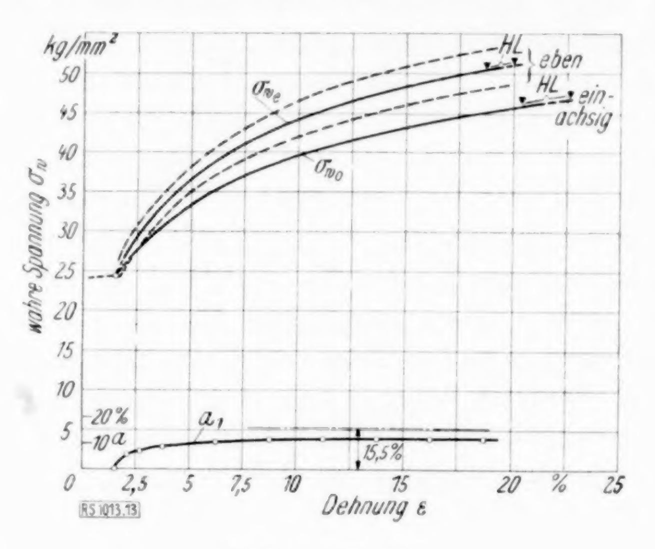


Abb. 6. Stahl.

eine Übereinstimmung verschiedenartiger Versuche, bei denen er jedoch nur bis etwa 15 % Verformung ging. Abb. 4 und 5 zeigen, daß Unterschiede zwischen ebener Verformung und einachsigem Zug hier noch in der Fehlergrenze liegen, bei größeren Verformungen aber deutlich werden. Dies zeigt auch die a-Kurve, die bei Deckung der Verfestigungskurven in Abb. 4 und 5 konstant $a = 15{,}5\,\%$ (wie bei Gültigkeit der v. **Mises**schen Fließbedingung) sein müßte; sie nähert sich aber dem Wert $a = 0$ (wie bei Gültigkeit der **Mohr**schen Bedingung). Dies könnte dazu verführen zu sagen, daß die Fließbedingung von Messing mit zunehmender Verfestigung von der v. **Mises**schen in die **Mohr**sche Form hinüberwechselt, ähnlich wie **Lode**[11]) für Flußeisen ein Wechseln von der **Mohr**schen in die v. **Mises**sche

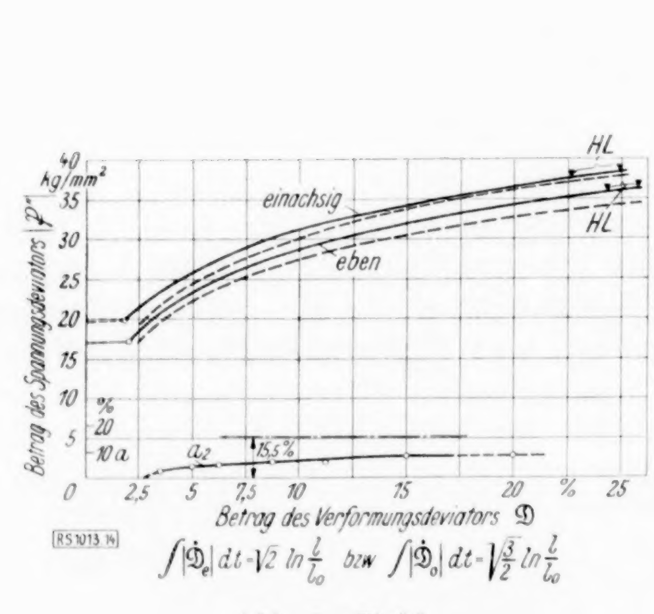


Abb. 7. Stahl.

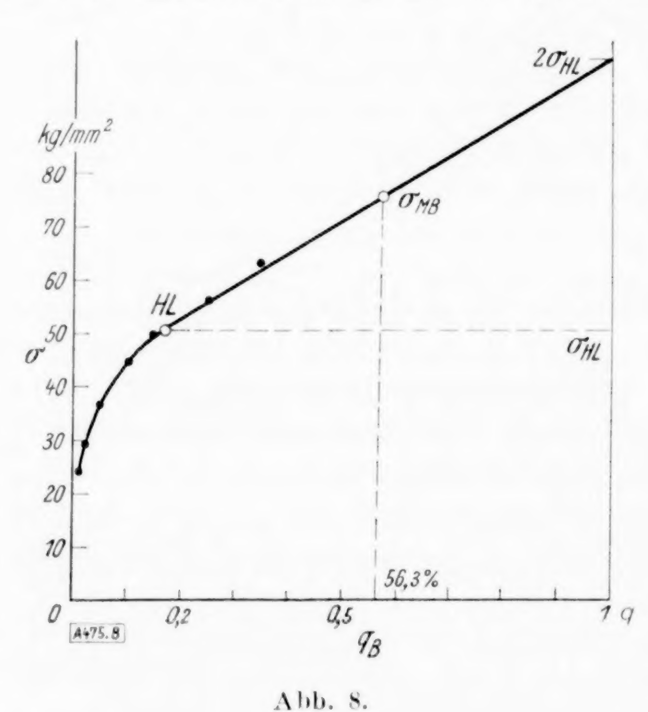


Abb. 8.

Form ausgesagt hat, also in umgekehrter Richtung, wie sie auch beim Böhlerstahl gefunden wurde (Abb. 7). Eine solche Aussage täuscht aber insofern etwas über den wahren Sachverhalt, als die Darstellung verschiedenartiger Versuche in verschiedener Weise beim Wechsel der als Abszisse gewählten Größe verzerrt wird; daher nehmen auch die a-Kurven völlig verschiedenartige Formen an. Man muß vielmehr anstreben, neue Größen für Abszisse und Ordinate zu finden, in deren Darstellung die Kurven voll zur Deckung kommen. Dann stellt die Abszisse ein geeignetes Maß der Vorgeschichte dar, und die Ordinate gibt eine unveränderliche Form der Fließbedingung an.

[9]) Vgl. H. Fromm: Ing. Arch. 4, 1933, S. 432 und ZAMM 13, 1933, S. 427.
[10]) R. Schmidt: Ing. Arch. 3, 1932, S. 215.
[11]) W. Lode: Der Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle, Forsch. Ing. Wes., H. 303, 1928.

Diese noch bestehende Unsicherheit der Darstellung macht sich auch beim Vergleich des Bruches nach ebener Verformung und am Rundstab bemerkbar. Immerhin ergibt sich deutlich, daß die Bruchverformung beim Rundstab größer ist; so ergab z. B. die Messung der Brucheinschnürung beim Böhlerstahl:

	rund	eben[12]	
Querschnittsverminderung q_B	67,6	56,3	%
mittlere Höchstdehnung . ε_B	208	129	%
Deviatorintensität . . . . D_0	1,37	1,17	—
Mittelspannung . . . . . σ_M	76,8	78,0	kg/mm² (Reißbruch)
Wendetangente . . . . . ϑ_{max}	0,28 (= 16°)	≈ 0,24 (= 14°)	—

Die Mittelspannung beim Bruch kann durch Extrapolation zur Querschnittsverminderung q_B ermittelt werden, auch wenn nur wenige Punkte hinter der Höchstlast gemessen sind, da der weitere Verlauf bei Darstellung der Spannung über der Querschnittsverminderung der Tangente im Höchstlastpunkt nahe folgt und diese Tangente konstruiert werden kann, wenn der Höchstlastpunkt (HL) festliegt[13]) (Abb. 8).

Nach (4) ist nun die Reißkohäsion bei ebener Verformung auf $\sigma_{max} = 1{,}1 \cdot 78{,}0 \approx 86$ kg/mm² zu schätzen. Beim Rundstab ist sie noch höher zu erwarten, da der größeren Verformung eine höhere Reißverfestigung entsprechen dürfte. Diesem Umstande ist es übrigens zu verdanken, daß die Auswertung der Versuche überhaupt möglich war, da sonst der Bruch nicht im ebenen Mittelstück, sondern in der Randversteifung begonnen hätte, die sich wesentlich wie ein Rundstab verformt (vgl. auch Abb. 3).

Die vorstehenden Mitteilungen sollen noch durch weitere Versuche geprüft und ergänzt werden. Auch sollen nicht, wie bisher, nur einartige Versuche durchgeführt werden. Versuche mit Artwechsel sind in Vorbereitung. 475

Das Zustandekommen der turbulenten Austauschgröße.

Von *Hans Gebelein* in Stuttgart.

Seit Boussinesq setzt man die mittlere turbulente Strömung in Analogie zur laminaren Strömung. Der Unterschied besteht darin, daß bei der turbulenten Strömung an Stelle der kinematischen Zähigkeit eine andersartige Austauschgröße, die turbulente Austauschgröße, wirksam ist. Lautet z. B. für die einfache stationäre Rohrströmung die Gleichung der laminaren Bewegung

$$\frac{\tau}{\varrho} = \nu \frac{d u}{d y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

so lautet die entsprechende Gleichung für die mittlere turbulente Strömung

$$\frac{\tau}{\varrho} = \varepsilon \frac{d \bar{u}}{d y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

wobei $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Das Problem ist die Ermittlung der turbulenten Austauschgröße ε, die ebenso wie die kinematische Zähigkeit die Dimension cm²/sec hat, die aber keine Konstante ist, sondern vom Ort in der Strömung und von der mittleren Geschwindigkeitsverteilung abhängt.

Bekanntlich machte Prandtl für die Größe ε aus Gl. (2) den erfolgreichen Ansatz

$$\varepsilon = l(y)^2 \frac{d \bar{u}}{d y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

wo die Länge l auf Grund anschaulicher Überlegungen in Analogie zur kinetischen Gastheorie als „Mischungsweg" bezeichnet wird. Tatsächlich ist dieser Ansatz demjenigen von Boussinesq wesentlich überlegen, da die Länge l im wesentlichen nur eine Funktion des Ortes ist. Zwar hängt l noch schwach von der Reynoldsschen Zahl ab, aber mit wachsendem Re nähert $l(y)$ sich von oben her einer Grenzkurve, so daß für unendliche Reynoldssche Zahl der Mischungsweg exakt nur noch vom Orte abhängt. Die Prandtlsche Theorie macht keine Aussage über die Funktion, die diese Abhängigkeit vom Orte beschreibt. Aus der Erfahrung wissen wir nur, daß $l(y)$ in Wandnähe proportional mit dem Wandabstand y ansteigt.

[12]) Baranski gibt hierfür kleinere Werte an, die vor dem Bruch liegen.
[13]) Vgl. z. B. G. Sachs: Mechan. Technologie der Metalle, Leipzig 1925. S. 26.

In der neuen Theorie der Hydrodynamik auf der Grundlage der physikalischen Statistik[1]) tritt die turbulente Austauschgröße als gleichartiges Gegenstück zur kinematischen Zähigkeit neben dieser auf. Sie ist die mittlere Komponente π_{yy} eines Tensors, des „Turbulenztensors", dessen Berechnung auf Grund einfacher hydrodynamischer Vorstellungen mit den Schlußweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschieht. Die Gleichung der stationären Rohrströmung lautet in dieser Theorie

$$\frac{\tau}{\varrho} = (\nu + \pi_{yy}) \frac{d\bar{u}}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Der Aufbau ist für ν und π_{yy} der gleiche, nämlich

$$\frac{1}{3} c^2 t^* \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wo c eine Geschwindigkeit und t^* eine für die Statistik grundlegende Zeit, die Verweilzeit, darstellt. Der Faktor 1/3 rührt von den drei Dimensionen des Raumes her. Bekanntlich ist nach der kinetischen Gastheorie $\nu = \frac{1}{3} c^2 t^* = \frac{1}{3} c \lambda$, wo c die Schwirrgeschwindigkeit der Moleküle bedeutet und $t^* = \frac{\lambda}{c}$ die mittlere Zeit ist, die die Moleküle ohne Zusammenstoß fliegen, d. h. die Zeit der mittleren freien Weglänge.

Die physikalische Grundlage für die Entstehung der turbulenten Austauschgröße und damit der Turbulenzstatistik sind nun nicht die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie, sondern einfache hydrodynamische Erfahrungstatsachen. Es ist dies die Tatsache, daß jede Strömung in einer zähen Flüssigkeit mit der Zeit zur Ruhe kommt, wenn nicht an den Wänden Schubspannung übertragen wird. Dies äußert sich in der dauernden Entstehung neuen Wirbelmaterials. Die Achse der neuentstehenden Wirbel liegt im Mittel parallel zur Wand und senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei der laminaren Strömung weist das neuentstehende Wirbelmaterial konstante Dichte auf, und die Richtung der Wirbel ist exakt die angegebene. Bei der turbulenten Strömung dagegen ist diese Gleichförmigkeit durch elementare Vorgänge in der Grenzschicht, Wirbelablösungen an Zacken und dergleichen gestört, und eine Augenblicksaufnahme der neuentstehenden Wirbelfäden ähnelt anschaulich der Maserung des Holzes, aus dem die Wand gefertigt sein mag, wenn die Fasern senkrecht zur Strömungsrichtung liegen. Diese zufallartigen Abweichungen der neuentstehenden Rotation vom Mittelwert sind die Grundlage der Turbulenztheorie und geben den Anlaß zur Entstehung der turbulenten Austauschgröße. Natürlich können im Rahmen eines Vortrags nur die Hauptgedanken mitgeteilt werden.

Die nächste Aufgabe der Theorie ist die Ermittlung der Größen c und t^*. Zunächst soll das Zustandekommen der Geschwindigkeit c erklärt werden. c ist der Mittelwert der zur mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ an der betrachteten Stelle infolge der turbulenten Schwankungen hinzutretenden Streuungsgeschwindigkeiten. In der laminaren Strömung ist c gleich Null. Diese Zusatzgeschwindigkeiten rühren davon her, daß die Rotation an jeder Stelle der Flüssigkeit dauernd um ihren Mittelwert schwankt. Diese fehlerhaften Größen der Rotation sind es, die im Aufpunkt die fehlerhafte, zur mittleren Geschwindigkeit hinzutretende Streuungsgeschwindigkeit erzeugen. Dieser Gedanke liefert bei der exakten Durchrechnung mit den Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung das Ergebnis, daß die mittlere Zusatzgeschwindigkeit c proportional der vierten Wurzel aus dem Absolutwert der mittleren Rotation an der betreffenden Stelle ist:

$$c \sim \sqrt[4]{|\operatorname{rot} \mathfrak{v}|} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Das Zustandekommen der Verweilzeit t^* ist nun in folgender Weise zu übersehen. Die Verweilzeit ist ein Maß dafür, ob der Strömungsvorgang an der betreffenden Stelle mehr oder weniger lange so erfolgt, wie es die deterministische Mechanik auf Grund der Anfangsbedingungen voraussagt. An den Wänden, an denen Schubspannung übertragen wird, entsteht zufallartig Wirbelmaterial, das in der Flüssigkeit nicht deterministisch erfaßbare, infinitesimale Zusatzgeschwindigkeiten hervorruft. Diese überlagern sich dauernd den deterministisch bestimmten Geschwindigkeiten und führen zur allmählichen Auflösung des Determinismus und zu einer endlichen Verweilzeit. Sind keine Wände vorhanden, an denen Schubspannungen übertragen werden, so ist die Verweilzeit unbegrenzt groß. Wie die ausführliche Rechnung lehrt, ist die Verweilzeit t^* proportional dem Quotienten aus der kinetischen Energie, die in den deterministisch bestimmten Streuungsgeschwindigkeiten mit dem Mittelwert c steckt und der

[1]) H. Gebelein: Turbulenz. Im Verlag Julius Springer, Berlin, im Erscheinen begriffen.

kinetischen Energie in den zufallartigen, durch unregelmäßiges, neuentstehendes Wandwirbelmaterial erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeiten aber sind um so kleiner, je größer die Entfernung der betrachteten Stelle von der Wand ist. Daher ergibt sich

$$t^* \sim c^2 y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Aus den Beziehungen (6) und (7) folgt dann zusammen für die turbulente Austauschgröße

$$\pi_{yy} = \frac{1}{3} c^2 t^* = \mathrm{const}\, y^2 \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Genauer liefert die Theorie im Falle der unendlich ausgedehnten ebenen Wand für den Tensor der turbulenten Austauschgrößen, den Turbulenztensor, den Ausdruck

$$\Pi(y) = C^2 (y - a)^2 \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Dabei sind C und a zwei Konstante, die die Theorie unbestimmt läßt, über deren Größe aber die Experimente erschöpfend Auskunft geben. Insbesondere ist a eine kleine Länge von der Größenordnung der Zackenhöhe der Wandrauhigkeiten, deren Größe für die Wirkung der Wandrauhigkeit entscheidend ist. Wir setzen sie im folgenden gleich Null.

Es ist noch auf den Zusammenhang mit dem Prandtlschen Mischungsweg hinzuweisen. Die Austauschgröße ε aus (3) ist nach (9)

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| = C^2 y^2 \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| + \nu .$$

Beim ebenen stationären Problem ist $|\mathrm{rot}\, \bar{\mathfrak{v}}| = \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$ und daher

$$l(y) = C\, y \sqrt{1 + \frac{\nu}{C^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}}}, \quad l(y) = C \cdot y \text{ für } \mathrm{Re} = \infty \quad \ldots \quad (10).$$

Daraus ist zu ersehen, daß der Mischungsweg bei zunehmender Reynoldsscher Zahl von oben her gegen eine allein vom Ort abhängige Grenzfunktion strebt, die im einfachsten Fall der unendlichen ebenen Platte im Einklang mit der Erfahrung eine lineare Beziehung mit dem Wandabstand ist.

Die neue Theorie liefert also ein Verfahren zur Berechnung des Turbulenztensors und damit auch der Abhängigkeit des Mischungsweges vom Ort. Der Turbulenztensor ist außerdem nach dieser Theorie ganz allgemein ein Funktional der die Strömung begrenzenden Wände, an denen Schubspannung übertragen wird, und daher sind die Turbulenzgleichungen zum Unterschied von den Navier-Stokesschen Gleichungen andere und andere für die verschiedenen hydrodynamischen Probleme.

Wir bringen nun zum Schluß eine kurze Tabelle der Turbulenztensoren für einige einfache Probleme.

a) Strömung an der unendlich ausgedehnten ebenen Wand — Grundlage für die Grenzschichttheorie. (y = Wandabstand):

$$\Pi(y) = C^2 y^2 \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Strömung in der Entfernung x vor der Vorderkante einer unendlich ausgedehnten Halbebene — Grundlage für die Theorie des Freistrahls:

$$\Pi(x, y) = 4\, C^2 x^2 \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

c) Strömung zwischen zwei parallelen Platten im Abstand 2b. (y gemessen von der Mittelebene aus):

$$\Pi(y) = C^2 \frac{(b^2 - y^2)^2}{2(b^2 + y^2)} \,|\mathrm{rot}\, \mathfrak{v}| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

d) Strömung im Kreisrohr. (y = Abstand von Rohrachse — mit der Einheit des Rohrradius r):

$$\Pi(y) = \frac{\pi}{4} C^2 \,|\operatorname{rot} \mathfrak{v}|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_2} \end{pmatrix}$$

mit

$$f_1(y) = \frac{3}{8\,r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{(1 + y^2 - 2\,y\cos\varphi)^{5/2}} \quad \text{und} \quad f_2(y) = \frac{3}{8\,r^2} \int_0^{2\pi} \frac{(y - \cos\varphi)^2 \, d\varphi}{(1 + y^2 - 2\,y\cos\varphi)^{5/2}},$$

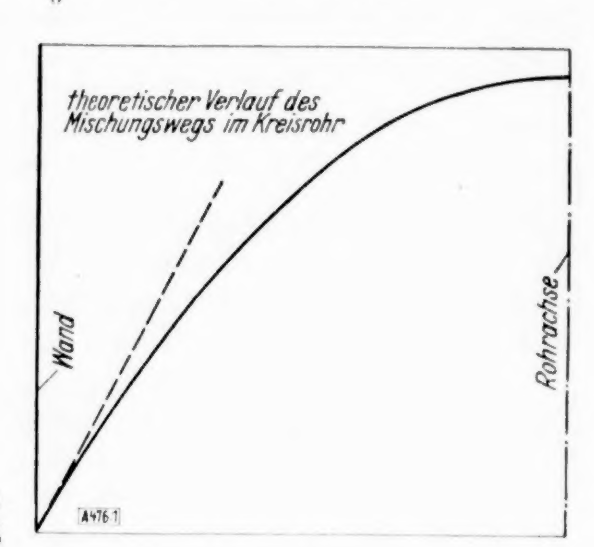
speziell ist

α) in der Nähe der Wand

$$\Pi(y) = C^2 r^2 (1 - y)^2 \,|\operatorname{rot} \mathfrak{v}|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. Beispiel a)},$$

β) in der Rohrachse $y = 0$

$$\Pi(y) = \frac{2}{3\pi} C^2 r^2 \,|\operatorname{rot} \mathfrak{v}|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Der theoretische Verlauf des Mischungswegs ist für diesen Fall aus der Abbildung zu ersehen. 476

Zur Zähigkeit wäßriger Suspensionen[1].

Von *R. Hermann* in Aachen.

Die von seiten der Keramiker über die Zähigkeit von Suspensionen aus Ton, Kaolin (Porzellanerde) oder Zementrohmehl vorliegenden zahlreichen Untersuchungen sind hinsichtlich der benutzten Meßmethoden vom hydrodynamischen Standpunkt recht wenig befriedigend. Es wurde deshalb eine Meßmethode entwickelt (Ausfluß aus einem langen, dünnen Glasrohr), die hydrodynamisch einwandfrei eine absolute Bestimmung der Zähigkeit von Tonsuspensionen erlaubt und den besonderen dabei vorliegenden Verhältnissen Rechnung trägt. An 3 wäßrigen Tonsuspensionen von 10 gewichtsprozentiger Konzentration in zwei Rohren verschiedenen Durchmessers bei starker Änderung der Druckhöhe bzw. der Durchflußmenge sowie der Reynoldsschen Zahl (1,4 bis 980) wurden die folgenden Ergebnisse gewonnen.

Wäßrige Tonsuspensionen besitzen keine Zähigkeit im üblichen Sinne, sie befolgen den Newtonschen Schubspannungsansatz nicht. Der nach dem bekannten Hagen-Poiseuilleschen Gesetz berechnete Zähigkeitswert (Mittelwert über den Querschnitt) bzw. die Fluidität ist keine Konstante, sondern eine Funktion der Schubspannung an der Rohrwand. Die Fluidität nimmt mit abnehmenden Schubspannungen ebenfalls ab und fällt bei den kleinsten Schubspannungen auf einen Bruchteil ($^1/_3$ bis $^1/_6$) ihres Wertes bei größeren Schubspannungen. Bei großen Schubspannungen nähert sich ihr Verhalten den homogenen Flüssigkeiten (konstante Fluidität). Auch bei gegebener Schubspannung ist die Fluidität keine Konstante, sondern nimmt mit zunehmendem Alter dauernd ab („Ansteifung"). Nach $^1/_2$jähriger Alterung scheint die Ansteifung mit etwa der 2- bis 3fachen Zähigkeit des Ausgangsstadiums ihr Ende erreicht zu haben. Die Suspensionen haften an der Rohrwand genau wie die üblichen homogenen Flüssigkeiten, es tritt keine Gleitung auf. Extrapolation der gemessenen Kurven bis zur Schubspannung Null machen folgendes Verhalten wahrscheinlich. Junge Tonsuspensionen bleiben bis zu den kleinsten Schubspannungen, bis zum Ruhezustande, „flüssig", wenn auch mit sehr hoher Zähigkeit, nämlich bis zur 12fachen Zähigkeit der bei großen Schubspannungen. Ältere Tonsuspensionen dagegen sind unterhalb einer Schubbeanspruchung von 1 bis 2 dyn/cm² nicht mehr „flüssig", ihre Zähigkeit ist dort unendlich groß. Sie beginnen erst nach Überschreitung dieser Grenze („Fließgrenze") zu fließen. 477

[1]) Die Arbeit wurde ausgeführt im Institut für Gesteinshüttenkunde der Techn. Hochschule Aachen mit freundlicher Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, der ich auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche. — Die ausführliche Veröffentlichung erfolgt in „Forschung auf d. Geb. d. Ing.-Wesens", voraussichtlich im Januar 1935.

Schwingungen elastischer Seile.

Von *Rudolf Höger* VDI in Prag.

Die Untersuchung befaßt sich mit den Schwingungen eines elastischen Seiles, welches zwischen zwei gleichhoch gelegenen Punkten (Abstand $2\,W$) aufgehängt ist. Während die bisher vorliegenden Arbeiten nur Verschiebungen der Seilpunkte in der vertikalen Richtung berücksichtigen oder in Anlehnung an die Theorie der schwingenden stark gespannten Saite den infolge der Schwingung auftretenden Spannungszuwachs vernachlässigen, sollen hier ohne diese einschränkenden Voraussetzungen die Verschiebungen r und t der Seilpunkte in radialer und tangentialer Richtung untersucht werden.

Da der Durchhang h gegenüber der Spannweite $2\,W$ als klein angenommen wird, möge die Kettenlinie durch einen Kreisbogen ersetzt werden. Zur Aufstellung der das Eigenwertproblem charakterisierenden Differentialgleichung wird vom Hamiltonschen Prinzip ausgegangen. Man gelangt so zunächst zu zwei simultanen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung zurückgeführt werden. Diese hat die Form

$$\varepsilon_0\,\bar{r}'''' + \varkappa\,\omega^2\,\bar{r}'' + \varkappa\,\omega^2\,(\varkappa\,\omega^2 - 1)\,\bar{r} = 0.$$

Hierin ist $\bar{r}$ der nur vom Orte abhängige Faktor der Radialverschiebung r; die Ableitungen beziehen sich auf den Neigungswinkel der Seiltangente. ε_0 bezeichnet die bereits im Ruhestand vorhandene Dehnung, $\varkappa$ hingegen eine von den mechanischen und geometrischen Eigenschaften des Seiles (Elastizitätsmaß, Querschnitt usw.) abhängige Konstante. ω bedeutet die Eigenfrequenz. Eine analoge Gleichung besteht für t.

Die Lösungen für $\bar{r}$ und t haben daher die Form einer Kombination von Kreis- und Hyperbelfunktionen. Die Erfüllung der Randbedingungen führt endlich zu zwei transzendenten Frequenzgleichungen, deren Lösungen zwei Reihen von Eigenwerten liefern. Man gelangt dergestalt zu einem System von Eigenschwingungen mit Schwingungsformen, welche bezüglich der Mittellotrechten symmetrisch sind und zu einem zweiten Schwingungssystem mit unsymmetrischen Schwingungsformen.

Anschließend wurden noch die infolge der Schwingung auftretenden dynamischen Zusatzspannungen berechnet, welche für die technischen Anwendungen (elektr. Fernleitungen, Seilbahnen usw.) bedeutungsvoll sind. 478

Einwirkung von Bodenschwingungen auf Pfeiler.

Von *Konrad Ludwig* in Hannover.

Im Jahre 1933 wurde in dem Forschungsinstitut für Straßenbau von Herrn Prof. Dr.-Ing. Risch an der Technischen Hochschule in Hannover die Dissertation von Herrn Dipl.-Ing. Otto Brötz, Erschütterungen in Gebäudeteilen aus Backsteinmauerwerk (Mauerwerkspfeiler), abgeschlossen. Die Bodenschwingung, die als einfach harmonisch und ungedämpft vorausgesetzt wird, wird in eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente zerlegt. Die Horizontalkomponente erregt im elastisch vorausgesetzten Pfeiler Biegungsschwingungen und die Vertikalkomponente Dehnungsschwingungen. In der Dissertation von Herrn Brötz wird die Theorie auf die erzwungenen Schwingungen beschränkt. Ich erweitere diese Theorie durch die Beantwortung folgender aus der Praxis sich ergebenden Fragen:

Wie sind die Eigenschwingungen beschaffen?

Wie sind die Resonanzschwingungen beschaffen?

Wie sind die erzwungenen, freien und Resonanzschwingungen beschaffen, wenn das obere Pfeilerende nicht frei ist, sondern eine Einzelmasse trägt?

Die Differentialgleichung der Dehnungsschwingungen ist

$$v^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Ist das obere Pfeilerende frei, so sind die Randbedingungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \text{ und } (u)_{x=h} = A \sin \omega\, t \text{ (Bodenschwingung)},$$

die Eigenfrequenzen

$$\omega_n = (2\,n - 1)\,\frac{\pi\, v}{2\,h} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und die gesamte Schwingung

$$u = A \frac{\cos \frac{\omega x}{v}}{\cos \frac{\omega h}{v}} \sin \omega t - 2 \frac{A}{h} v \omega \sum_{1}^{\infty} n \; (-1)^n \frac{\cos \frac{\omega_n x}{v} \sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} .$$

Wird die Bodenfrequenz einer Eigenfrequenz (der j) gleich, so wachsen die absoluten Amplituden der erzwungenen und der betreffenden freien Schwingung über alle Grenzen. Die durch Grenzübergang oder den Ansatz

$$u = D_j(x)\, t \cos \omega_j t + E_j(x) \sin \omega_j t$$

zu berechnende Resonanzschwingung ist

$$u = (-1)^j \frac{A}{h} v \cos \frac{\omega_j x}{v} t \cos \omega_j t - (-1)^j \frac{A}{h} \left(x \sin \frac{\omega_j x}{v} + \frac{v}{2\,\omega_j} \cos \frac{\omega_j x}{v} \right) \sin \omega_j t$$

$$- 2 \frac{A}{h} v \omega_j \sum_{1}^{\infty} n \neq j \; (-1)^n \frac{\cos \frac{\omega_n x}{v} \sin \omega_n t}{\omega_j^2 - \omega_n^2} .$$

Trägt das obere Pfeilerende die Masse m, so wird die Randbedingung für das obere Ende

$$- F E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=h} = m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=h} \quad (F \text{ Inhalt des Pfeilerquerschnitts})$$

und die Frequenzengleichung

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega_n h}{v} = \frac{m v}{F E} \omega_n .$$

Für die Amplituden A_n gilt die belastete Orthogonalität

$$n \neq \nu \quad \int_0^h A_n A_\nu \, d x = - \frac{m v^2}{F E} (A_n A_\nu)_{x=h} .$$

Die Anfangsbedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$$

erfordert die Entwicklung

$$\Sigma n \quad \omega_n B_n \sin \frac{\omega_n x}{v} = - A \omega \left(\frac{F E \sin \frac{\omega h}{v} + m v \omega \cos \frac{\omega h}{v}}{F E \cos \frac{\omega h}{v} - m v \omega \sin \frac{\omega h}{v}} \sin \frac{\omega x}{v} + \cos \frac{\omega x}{v} \right) .$$

Die zu entwickelnde Funktion erfüllt die Randbedingung für das obere Ende

$$(A_n')_{x=h} = \frac{m \omega_n^2}{F E} (A_n)_{x=h} ,$$

wenn hierin der Parameter ω_n^2 mit Hilfe der Differentialgleichung $v^2 A_n'' = - \omega_n^2 A_n$ eliminiert wird. Daher darf die Entwicklungsgleichung für das obere Ende zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten neben der belasteten Orthogonalität verwandt werden. Demnach ist die gesamte Schwingung

$$u = A \left(\frac{F E \sin \frac{\omega h}{v} + m v \omega \cos \frac{\omega h}{v}}{F E \cos \frac{\omega h}{v} - m v \omega \sin \frac{\omega h}{v}} \sin \frac{\omega x}{v} + \cos \frac{\omega x}{v} \right) \sin \omega t$$

$$+ A v \omega \, \Sigma n \; \frac{2}{\left(h + \frac{v}{2\,\omega_n} \sin \frac{2\,\omega_n h}{v} \right) (\omega^2 - \omega_n^2)} \sin \frac{\omega_n x}{v} \sin \omega_n t$$

und die Resonanzschwingung bis auf die übrigen Eigenschwingungen

$$u = -\frac{A\,v}{h + \frac{v}{2\,\omega_j}\sin\frac{2\,\omega_j h}{v}}\sin\frac{\omega_j x}{v}\,t\cos\omega_j t + A\left[\frac{v}{2\,\omega_j}\frac{h - \frac{v}{4\,\omega_j}\sin\frac{4\,\omega_j h}{v}}{\left(h + \frac{v}{2\,\omega_j}\sin\frac{2\,\omega_j h}{v}\right)^2}\sin\frac{\omega_j x}{v}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{-x}{h + \frac{v}{2\,\omega_j}\sin\frac{2\,\omega_j h}{v}} + 1\right)\cos\frac{\omega_j x}{v}\right]\sin\omega_j t\,.$$

Ist das obere Pfeilerende frei, so ist die gesamte Biegungsschwingung

$$y = \frac{A}{2}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}\sin\lambda x - \cos\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Cof}\,\lambda x}{\sin\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} - \cos\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}} + \frac{\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}\cos\lambda x + \sin\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Sin}\,\lambda x}{\sin\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \cos\frac{\lambda h}{2}\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}}\right)\sin\omega t$$

$$+ 4\frac{A}{h}\,\omega\sum_n \frac{\frac{\omega_{1n}}{\lambda_{1n}}}{\omega^2_{1n} - \omega^2}\,\frac{\sin\frac{\lambda_{1n}h}{2}\mathfrak{Sin}\frac{\lambda_{1n}h}{2}}{\sin^2\frac{\lambda_{1n}h}{2} + \mathfrak{Cof}^2\frac{\lambda_{1n}h}{2}}\left(\mathfrak{Cof}\frac{\lambda_{1n}h}{2}\sin\lambda_{1n}x - \sin\frac{\lambda_{1n}h}{2}\mathfrak{Cof}\,\lambda_{1n}x\right)\sin\omega_{1n}t$$

$$- 4\frac{A}{h}\,\omega\sum_n \frac{\frac{\omega_{2n}}{\lambda_{2n}}}{\omega^2_{2n} - \omega^2}\,\frac{\sin\frac{\lambda_{2n}h}{2}\mathfrak{Cof}\frac{\lambda_{2n}h}{2}}{\cos^2\frac{\lambda_{2n}h}{2} + \mathfrak{Sin}^2\frac{\lambda_{2n}h}{2}}\left(\mathfrak{Cof}\frac{\lambda_{2n}h}{2}\cos\lambda_{2n}x + \sin\frac{\lambda_{2n}h}{2}\mathfrak{Sin}\,\lambda_{2n}x\right)\sin\omega_{2n}t\,,$$

wobei die Frequenzengleichungen

$$\mathfrak{Tg}\frac{\lambda_{1n}h}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\lambda_{1n}h}{2} \qquad\qquad \mathfrak{Tg}\frac{\lambda_{2n}h}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{\lambda_{2n}h}{2}$$

sind. Im Falle $\omega = \omega_{1j}$ ist bis auf die übrigen Eigenschwingungen

$$y = A\,\omega_{1j}\frac{\mathfrak{Tg}\frac{\lambda_{1j}h}{2}}{\lambda_{1j}h}\left(\frac{\sin\lambda_{1j}x}{\sin\frac{\lambda_{1j}h}{2}} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_{1j}x}{\mathfrak{Cof}\frac{\lambda_{1j}h}{2}}\right)t\cos\omega_{1j}t + A\left[\mathfrak{Tg}\frac{\lambda_{1j}h}{2}\,\frac{x}{2h}\left(\frac{\cos\lambda_{1j}x}{\sin\frac{\lambda_{1j}h}{2}} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_{1j}x}{\mathfrak{Cof}\frac{\lambda_{1j}h}{2}}\right)\right.$$

$$- \frac{1}{4\sin^3\frac{\lambda_{1j}h}{2}}\left(\cos\lambda_{1j}h + \frac{\sin\lambda_{1j}h}{2\,\lambda_{1j}h}\right)\sin\lambda_{1j}x + \frac{1}{4\,\mathfrak{Cof}^3\frac{\lambda_{1j}h}{2}}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda_{1j}h + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_{1j}h}{2\,\lambda_{1j}h}\right)\mathfrak{Cof}\,\lambda_{1j}x$$

$$\left. + \frac{\cos\lambda_{1j}x}{4\cos\frac{\lambda_{1j}h}{2}} + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_{1j}x}{4\,\mathfrak{Sin}\frac{\lambda_{1j}h}{2}}\right]\sin\omega_{1j}t\,.$$

Trägt das obere Pfeilerende eine Masse mit dem Trägheitsmoment Θ, so ist die belastete Orthogonalität

$$n \neq \nu \quad \int_0^h A_n\,A_\nu\,dx = \left(\frac{m}{\varrho F}A_n\,A_\nu - \frac{\Theta}{\varrho F}A_n'\,A_\nu'\right)_{x=h} \quad (\varrho \text{ Pfeilerdichte})\,. \qquad 479$$

Theorie der räumlichen Kerbwirkung.

Von *H. Neuber* in München.

In früheren Arbeiten wurden vom Verfasser grundlegende Probleme der ebenen und achssymmetrischen Kerbwirkung[1]) behandelt. Durch Aufsuchen von Spannungsfunktionen in einem jeweils geeigneten krummlinigen Koordinatensystem konnte der elastische Zustand in verschiedenartig geformten Kerben bei verschiedenartiger Beanspruchung und für beliebige Kerbkrümmung rechnerisch erfaßt werden.

[1]) H. Neuber: Elastisch-strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern, ZAMM, Bd. 13, 1933, S. 439. — H. Neuber: Zur Theorie der Kerbwirkung bei Biegung und Schub, Ing.-Arch., Bd. V, 1934, S. 238.

Ein vor kurzem vom Verfasser veröffentlichter neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Elastizitätsprobleme[2]) ermöglicht es, diese Gedankengänge auch auf das für den Ingenieur so überaus wichtige Gebiet der räumlichen Spannungsverteilung in Kerben anzuwenden, welches bisher noch so gut wie unerforscht geblieben ist.

Durch den neuen Ansatz lassen sich nämlich die Raumkomponenten des elastischen Verschiebungsvektors durch einfache Differentiation aus drei harmonischen Funktionen ableiten,

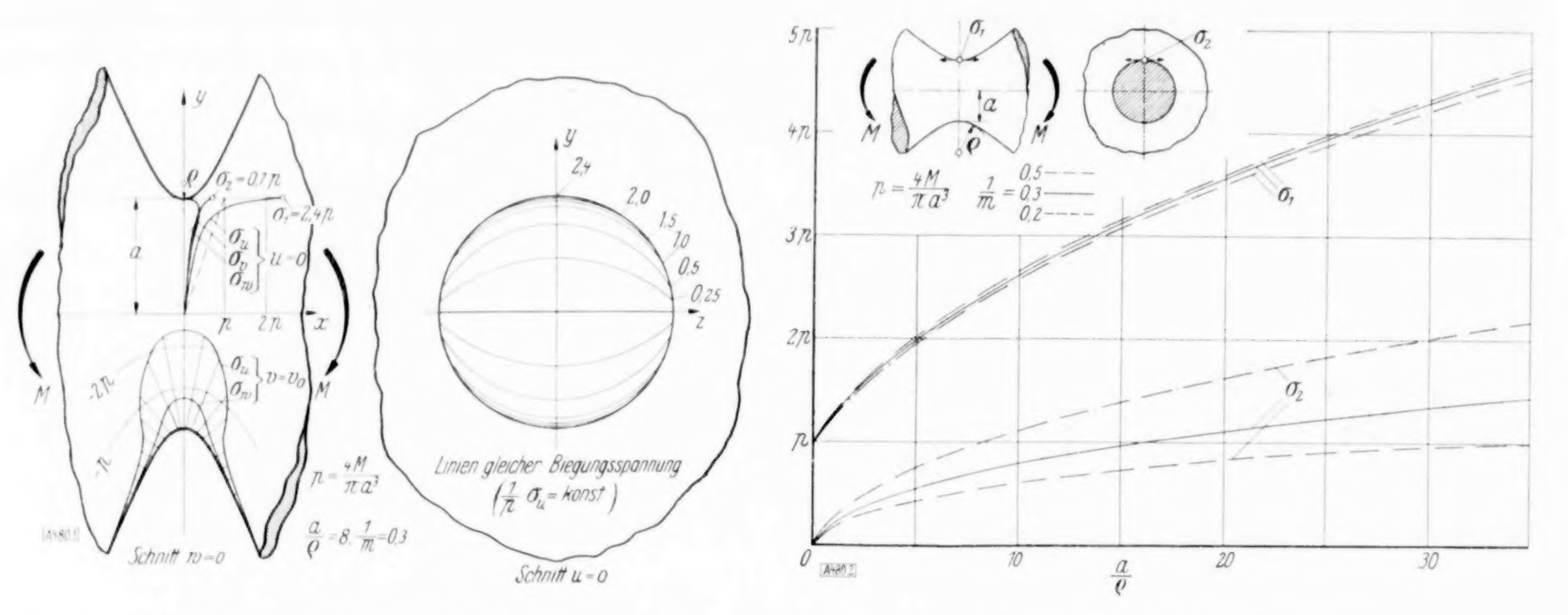


Abb. 1. Spannungsverteilung in einer Umdrehungsaußenkerbe bei Biegung.

Abb. 2. Die Höchstspannungen in Umdrehungsaußenkerben bei Biegung.

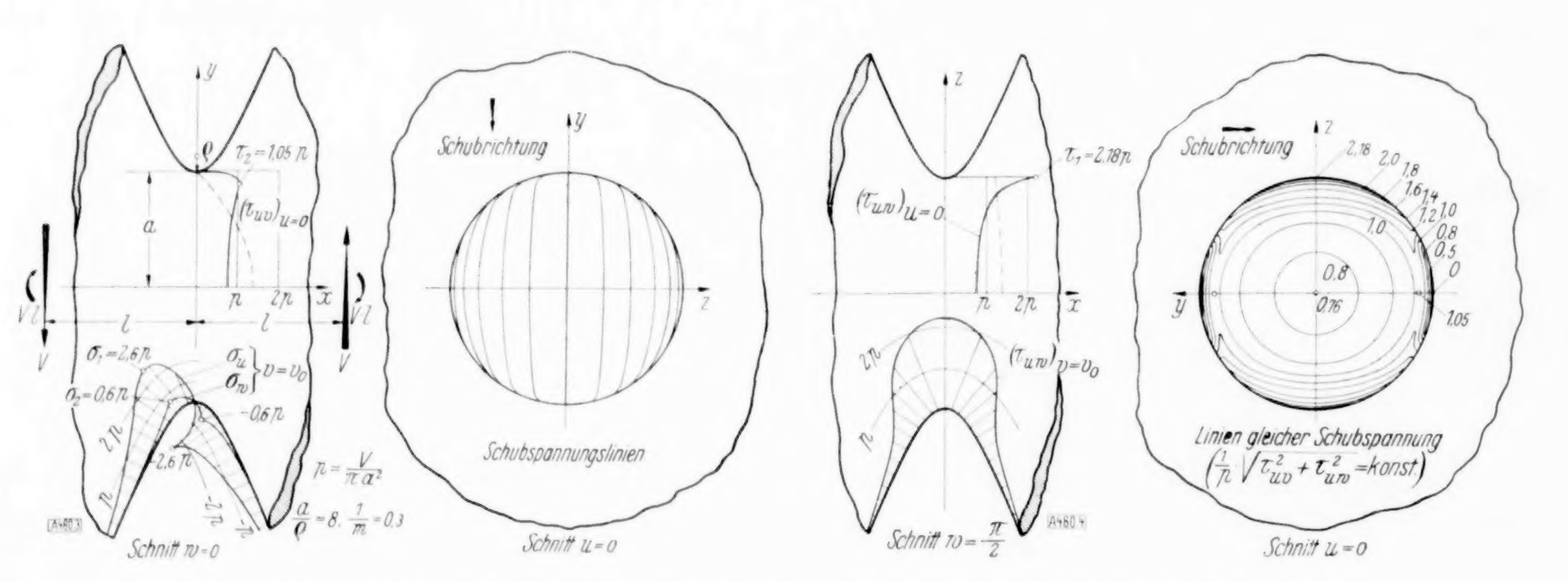


Abb. 3 und 4. Spannungsverteilung in einer Umdrehungsaußenkerbe bei Schub.

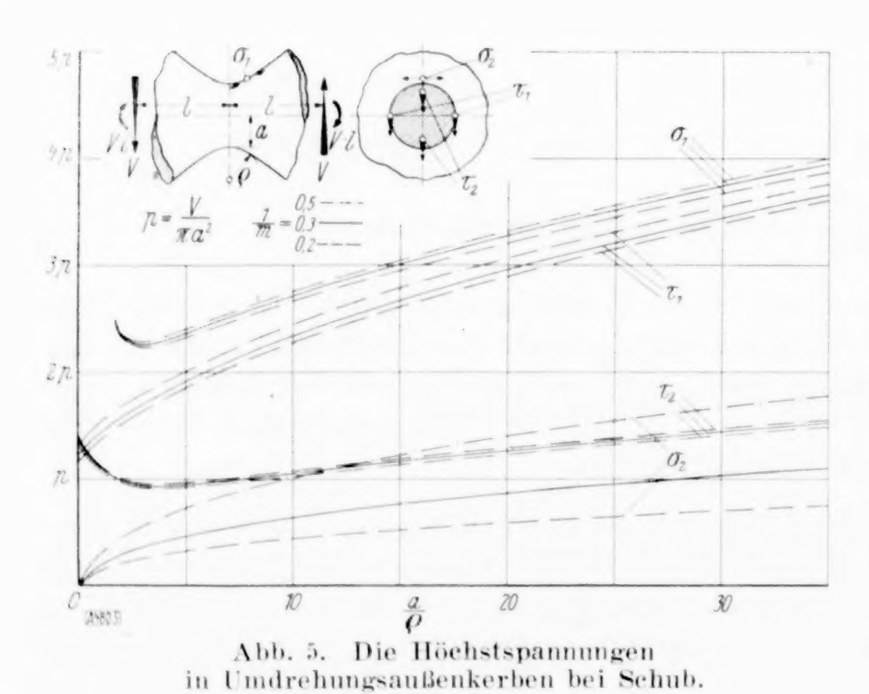


Abb. 5. Die Höchstspannungen in Umdrehungsaußenkerben bei Schub.

wobei eine einfache Kombination dieser Funktionen die Rolle einer „räumlichen Spannungsfunktion" spielt; die Theorie der räumlichen Kerbwirkung wird so auf ein Spannungsfunktionsverfahren zurückgeführt. Dabei ist von ausschlaggebender Bedeutung, daß für den Rechnungsgang auch in krummlinigen Koordinaten keine prinzipiellen Schwierigkeiten bestehen.

Die Ableitung der einzelnen Lösungen wird an anderer Stelle ausführlich veröffentlicht werden.

Die Abbildungen 1 bis 5 veranschaulichen den Fall der Umdrehungsaußenkerbe bei Biegung und Schub. 480

[2]) H. Neuber: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, ZAMM, Bd. 14, 1934, S. 203.

Die Schwingungsvorgänge in Systemen mit zwei Freiheitsgraden.

Von *W. Quade* in Karlsruhe.

Die einfachsten Schwingungsprobleme, die bei Systemen mit einem Freiheitsgrad auftreten, führen, wenn man sich auf die freien Schwingungen beschränkt, auf eine lineare, homogene Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$a\frac{d^2 x}{d t^2}+b\frac{d x}{d t}+c\,x=0\,,\qquad \text{oder}\qquad (a\,D^2+b\,D+c)\,x=0\,. \qquad (1).$$

Dabei sind a, b, c positive Konstanten, D ist der symbolische Differentialoperator, und x kann beispielsweise gedeutet werden als die von der Zeit t abhängige Ablenkung eines schwingenden Massenpunktes aus der Ruhelage.

Entscheidend für die Lösungen, welche (1) überhaupt haben kann, ist die Natur der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (1):

$$\Delta(D)\equiv a\,D^2+b\,D+c=0 \qquad (2).$$

Danach unterscheidet man folgende Fälle:

Klasse [1 1]. Die Wurzeln von (2) sind voneinander verschieden.

a) Die Wurzeln sind reell, aperiodischer Fall.

b) Die Wurzeln sind konjugiert komplex, periodischer Fall.

Klasse [2]. Die Wurzeln von (2) sind gleich, aperiodischer Grenzfall.

Die hier gegebene Einteilung weicht ein wenig von der herkömmlichen ab. Die Zugehörigkeit zu einer Klasse wird durch die Vielfachheit der Wurzeln von (2) entschieden. Innerhalb der einzelnen Klassen wird dann noch nach reellen und komplexen Wurzeln unterteilt.

Damit sind alle in einem frei schwingenden System mit einem Freiheitsgrad möglichen Vorgänge aufgezählt. Die Unterscheidung der Vorgänge erfolgt nach formal-algebraischen Gesichtspunkten, nach den Eigenschaften der Wurzeln der algebraischen Gleichung (2).

Das Problem der Aufzählung aller in einem System mit mehreren Freiheitsgraden möglichen Vorgänge ist ungleich schwieriger. Zur Konstruktion von Fallunterscheidungen hat man sich in Ermangelung eines Besseren vielfach an das Nächstliegende gehalten, an die Art der Kopplung. Diese liefert aber kein Kriterium für den Ablauf des Vorganges.

Der unten zur Klassifikation der Schwingungsvorgänge in Systemen mit 2 Freiheitsgraden eingeschlagene Weg beruht auf einer Verallgemeinerung der bei Systemen mit einem Freiheitsgrad schon von jeher gebräuchlichen formal-algebraischen Methode. Die verallgemeinerte Methode löst das Problem der Aufzählung der Schwingungsvorgänge für Systeme mit beliebig vielen Freiheitsgraden.

Die freien Schwingungen eines Systems mit 2 Freiheitsgraden, dessen kleine Ablenkung aus der Ruhelage durch die Koordinaten x_1, x_2 charakterisiert wird, werden regiert durch ein System von linearen, homogenen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}\,D^2+b_{11}\,D+c_{11})\,x_1+(a_{12}\,D^2+b_{12}\,D+c_{12})\,x_2=0\,,\\(a_{21}\,D^2+b_{21}\,D+c_{21})\,x_1+(a_{22}\,D^2+b_{22}\,D+c_{22})\,x_2=0\,,\end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

Die symmetrische Matrix des Systems (3) ist

$$M(D)=\left\{\begin{matrix}a_{11}\,D^2+b_{11}\,D+c_{11}\,, & a_{12}\,D^2+b_{12}\,D+c_{12}\\ a_{21}\,D^2+b_{21}\,D+c_{21}\,, & a_{22}\,D^2+b_{22}\,D+c_{22}\end{matrix}\right\}\doteq A\,D^2+B\,D+C\,,$$

und seine charakteristische Gleichung erhält man durch Nullsetzen der Determinante von $M(D)$:

$$\Delta(D)\equiv(a_{11}\,a_{22}-a_{12}{}^2)\,D^4+\ldots+c_{11}\,c_{22}-c_{12}{}^2=0 \qquad (4).$$

Bei den Systemen mit einem Freiheitsgrad ist entscheidend für die Art des Vorgangs der Ausdruck $a\,D^2+b\,D+c$, bei den Systemen mit 2 Freiheitsgraden ist es die Matrix $M(D)$.

Die Matrizes $M(D)$ teilen wir zunächst in 3 Gruppen ein.

I. Gruppe: Die Elemente von $M(D)$ sind teilerfremd.

II. Gruppe: Der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von $M(D)$ ist ein Polynom vom 1-ten Grade in D:

$$M(D)=\left\{\begin{matrix}(D-s_1)(a_{11}\,D-\sigma_{11})\,, & (D-s_1)(a_{12}\,D-\sigma_{12})\\ (D-s_1)(a_{21}\,D-\sigma_{21})\,, & (D-s_1)(a_{22}\,D-\sigma_{11})\end{matrix}\right\}.$$

(4) hat hier immer eine reelle Doppelwurzel.

III. Gruppe: Der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von $M(D)$ ist ein Polynom vom 2-ten Grade in D:

$$M(D) = \begin{vmatrix} a_{11}(D-s_1)(D-s_2), & a_{12}(D-s_1)(D-s_2) \\ a_{21}(D-s_1)(D-s_2), & a_{22}(D-s_1)(D-s_2) \end{vmatrix}.$$

(4) hat hier immer 2 Doppelwurzeln.

Innerhalb der einzelnen Gruppen unterteilen wir nach Klassen, wobei wir wie bei den Systemen mit einem Freiheitsgrad die Vielfachheit der Wurzeln von $\Delta(D) = 0$ entscheiden lassen.

I. Gruppe: [1 1 1 1], [2 1 1], [2 2], [3 1], [4].

Die in eckige Klammern gesetzten Ziffern sind die Exponenten der verschiedenen Linearfaktoren, in welche sich $\Delta(D)$ zerlegen läßt.

II. Gruppe: [(1 1) 1 1], [(1 1) 2], [(2 1) 1], [(3 1)].

Die Summe der in runde Klammern gesetzten Ziffern ergibt jeweils den Exponenten des Linearfaktors $D - s_1$.

III. Gruppe: [(1 1) (1 1)], [(2 2)].

Es gibt hier nur 2 Klassen: $s_1 \neq s_2$ und $s_1 = s_2$.

Damit sind die Matrizes $M(D)$ in 11 Klassen eingeteilt.

Bei dieser Einteilung ist ein Umstand unberücksichtigt geblieben, der für die bei Schwingungsproblemen auftretenden Matrizes $M(D) = A\,D^2 + B\,D + C$ charakteristisch ist. A, B, C müssen symmetrisch sein und Matrizes von positiv definiten quadratischen Formen, nämlich von $2\,T$, $2\,F$, $2\,U$, wo T, F und U die kinetische Energie, die Rayleighsche Zerstreuungsfunktion und die potentielle Energie des Systems sind. Matrizes dieser Art gibt es aber für die Klassen [(1 1) 2] und [(3 1)] nicht, eine eigentümliche Erscheinung.

Bleibt noch zu untersuchen, ob und in welcher Weise innerhalb der einzelnen Klassen komplexe Wurzeln auftreten können. In der folgenden Tafel ist für jede Klasse (mit Ausnahme der oben ausgeschlossenen [(1 1) 2] und [(3 1)]) die Zahl der komplexen Wurzelpaare, die auftreten können, angegeben.

I. Gruppe:	[1 1 1 1],	[2 1 1],	[2 2],	[3 1],	[4].
	0	0	0	0	0
	1	1	—	—	—
	2	—	2	—	—

II. Gruppe:	[(1 1) 1 1],	[(2 1) 1].
	0	0
	—	—
	—	—

III. Gruppe:	[(1 1) (1 1)],	[(2 2)].
	0	0
	—	—
	2	—

Bei einem System mit 2 Freiheitsgraden ist die Gesamtzahl der wesentlich voneinander verschiedenen Schwingungsvorgänge 14.

Eine reinliche Scheidung zwischen periodischen und aperiodischen Vorgängen ist nicht möglich, denn in der Lösung des Systems (3) können gleichzeitig Funktionen mit periodischem und aperiodischem Verhalten auftreten. Man kann höchstens einteilen in aperiodische, periodische und gemischte Vorgänge und kommt dabei auf 9 aperiodische, 3 periodische und 2 gemischte.

Die mathematischen Grundlagen dieser Untersuchungen sind einem speziellen Kapitel der linearen Algebra entnommen, der von Weierstraß begründeten Elementarteilertheorie. Gewisse bei der Untersuchung der Matrix $M(D)$ vorkommende Potenzen von Linearfaktoren nennt man Elementarteiler, und diese Teiler sind Invarianten, Invarianten nicht nur gegenüber linearen Transformationen mit konstanten Koeffizienten, sondern sogar gegenüber gewissen Transformationen, die Differentialquotienten der Koordinaten enthalten. Diese Invarianten charakterisieren diejenigen Eigenschaften eines schwingenden Systems, welche von der zufälligen Wahl der Koordinaten unabhängig sind, insbesondere den Ablauf des Vorgangs, denn dieser kann ja nicht von der Wahl des zugrunde gelegten Koordinatensystems abhängen. Die Art der Kopplung ist dagegen nicht invariant. Man kann weder von der Art der Kopplung auf den Ablauf des Vorganges, noch von der Klasse des Vorganges auf die Art der Kopplung schließen[1]).

[1]) Vgl. des Verfassers Arbeit: „Klassifikation der Schwingungsvorgänge in gekoppelten Stromkreisen" (Habilitationsschrift, Karlsruhe 1933).

Angenäherte Berechnung des kleinsten Eigenwertes zusammengesetzter Systeme.

Von *H. Schaefer* in Hannover.

Bei der Behandlung von Eigenwertproblemen wird man häufig auf die Untersuchung der Abhängigkeit der Eigenwerte von Parametern geführt, die in das betreffende Problem eingehen. Die Methoden der Störungsrechnung versagen, wenn es sich darum handelt, solche Abhängigkeiten im „Großen" zu betrachten. Sind z. B. in der Differentialgleichung

$$(p\,y')' + (\Lambda_1\,q_1 + \Lambda_2\,q_2)\,y = 0 \quad [p(x) > 0] \qquad (1)$$

die Parameter Λ_1 und Λ_2 so festzulegen, daß die Lösungen gewissen Randbedingungen genügen, so liefern die jeweils zusammengehörigen, in einer (Λ_1, Λ_2)-Ebene aufgetragenen Parameterwerte die „Eigenkurven", deren Gestalt (Auftreten von Extremwerten und Wendepunkten) aus der Differentialgleichung heraus zu begründen noch nicht gelungen ist. Außer einigen rein formalen Ansätzen von van den Dungen[1]) scheint über solche oder ähnliche Fragestellungen keine Literatur zu existieren. Man kann jedoch auf Grund der Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes wenigstens über die Eigenkurven niedrigster Ordnung einiger, bei Eigenwertproblemen häufig auftretender Differentialgleichungen Aussagen von gewisser Tragweite machen. Mit Hilfe der Greenschen Formel zeigt man leicht, daß die Gleichung der Tangente im Punkte $\Lambda_1 = \alpha$, $\Lambda_2 = \beta$ einer Eigenkurve von (1) (Abb. 1) bei solchen Randbedingungen, für die eine symmetrische Greensche Funktion existiert, die Gestalt

$$\Lambda_1 = \frac{\int_0^1 p\,u'^2\,dx}{\int_0^1 q_1\,u^2\,dx} - \Lambda_2 \frac{\int_0^1 q_2\,u^2\,dx}{\int_0^1 q_1\,u^2\,dx} \qquad (2)$$

besitzt, wenn $u(x)$ die zu diesen Parameterwerten gehörige Eigenfunktion ist. Aus der bekannten Minimaleigenschaft der rechten Seite von (2) folgt sofort, daß die Eigenkurve niedrigster Ordnung, deren Ordinaten die jeweils kleinsten zu Λ_2 gehörigen Eigenwerte Λ_1 sind, immer unterhalb ihrer Tangente verläuft (konvex gekrümmt nach positiver Λ_1-Richtung), monoton fallend bei nichtnegativen q_1 und q_2. Da der zweite Summand in (2) im allgemeinen nur schwach auf eine Änderung von $u(x)$ reagiert, kann man die Eigenkurve in Annäherung

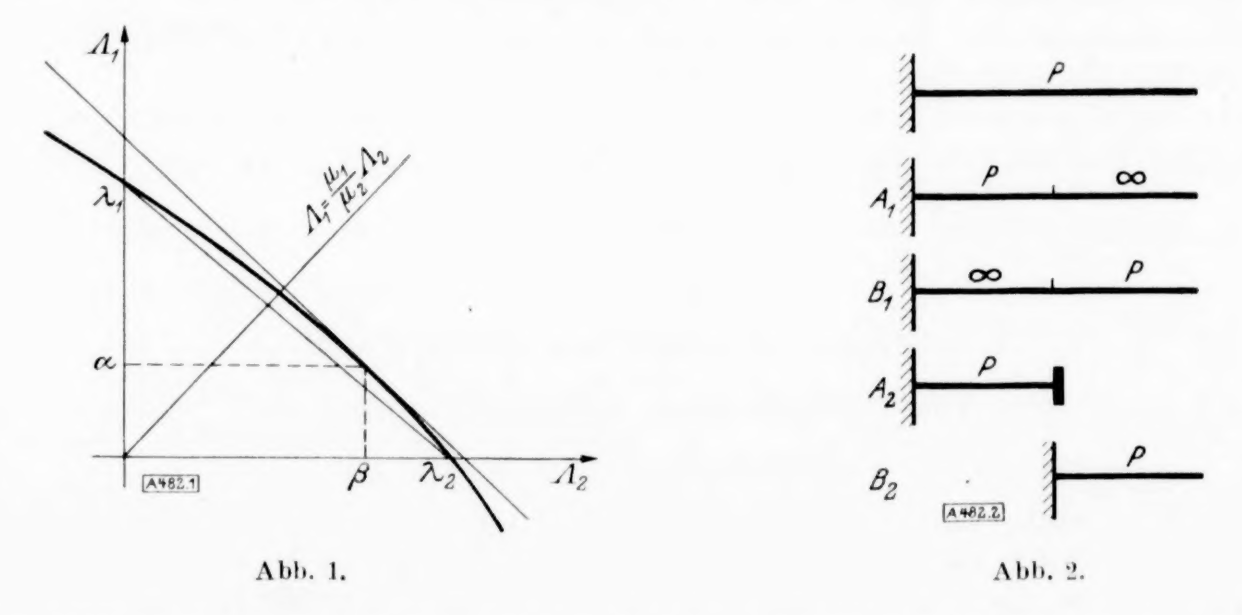


Abb. 1. Abb. 2.

durch eine Gerade ersetzen. Kennt man z. B. die kleinsten Eigenwerte λ_1 und λ_2 zweier schwingender Systeme gleicher Steifigkeit p, mit den voneinander verschiedenen Massenbelegungen q_1 und q_2, so folgt aus der für positive Λ_1 und Λ_2 gültigen Abschätzung $\frac{\Lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\Lambda_2}{\lambda_2} \geqq 1$ mit $\Lambda_1 = \mu_1\lambda$ und $\Lambda_2 = \mu_2\lambda$ für den kleinsten Eigenwert eines dritten Systems $(p\,y')' + \lambda\,(\mu_1\,q_1 + \mu_2\,q_2)\,y = 0$, dessen Massenbelegung sich linear aus denen der beiden ersten zusammensetzt, die bekannte Dunkerlysche Formel $\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \geqq \frac{1}{\lambda}$, deren Anwendungsmöglichkeit sich aber noch auf eine ganz andere Art von Zusammensetzungen erstreckt. Durch Einführen der neuen abhängigen Veränderlichen $p\,y' = z$, die wir wieder als Aus-

[1]) F. H. van den Dungen: Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations. Verhandlungen des 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik, S. 113.

lenkung deuten wollen, geht das System $(p\,y')' + \lambda\,q\,y = 0$ über in das ihm „adjungierte“ $\left(\frac{1}{q}\,z'\right)' + \lambda\,\frac{1}{p}\,z = 0$, das dieselben Eigenwerte besitzt. (Man kann einen unsymmetrischen Kern angeben, dessen adjungierte Eigenfunktionen im Sinne der E. Schmidtschen Theorie die Eigenfunktionen dieser beiden Systeme sind.) Die für den kleinsten Eigenwert des zusammengesetzten Systems $\left(\frac{1}{q}\,z'\right)' + \lambda\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) z = 0$ gültige Abschätzung $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ bleibt beim Übergang zum adjungierten System

$$\left(\frac{p_1\,p_2}{p_1 + p_2}\,z'\right)' + \lambda\,q\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bestehen. Das einfache Beispiel der Torsionsschwingung einer homogenen Welle mit Kreisquerschnitt, am einen Ende frei, am anderen eingespannt, soll diese Zusammensetzung von Steifigkeiten beleuchten (Abb. 2). Nach Vorschrift von (3) denken wir uns dieses System aus den Teilsystemen A_1 und B_1 zusammengesetzt, die stückweise unendlichgroße Steifigkeit besitzen und den Systemen A_2 und B_2 gleichwertig sind. Eine zweimalige Anwendung der Dunkerlyschen Formel gibt für den Eigenwert λ, der proportional dem Quadrat der kleinsten Frequenz ist, den Wert $\lambda > \frac{\pi^2}{17{,}8}$ $\left(\text{wahrer Wert: } \frac{\pi^2}{16}\right)$. In Anlehnung an L. Föppl*) wollen wir solche Zusammensetzungen Hintereinanderschalten von Steifigkeiten nennen. Ganz entsprechend kann man, von der Differentialgleichung $[(A_1\,p_1 + A_2\,p_2)\,y']' + q\,y = 0$ ausgehend, Nebeneinanderschalten von Steifigkeiten und Hintereinanderschalten von Massen definieren. Hierbei wird man auf die Southwellsche Formel $\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2$ geführt.

Selbstverständlich lassen sich solche Überlegungen sofort auf die Gleichung 4. Ordnung des schwingenden Balkens übertragen.

Auf kompliziertere Zusammensetzungen wird man bei der Betrachtung der Differentialgleichung

$$(p\,y'')'' + A_1\,(r\,y')' - A_2\,q\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

geführt. Erwähnt sei nur, daß man bei positiven p, r, q wieder durch Untersuchung der Eigenkurve niedrigster Ordnung im Gebiete positiver A_1 und A_2 die einfache Abschätzung $\frac{A_1}{\lambda_1} + \frac{A_2}{\lambda_2} \geq 1$ gewinnt, wobei λ_1 und λ_2 wieder kleinste Eigenwerte der Teilsysteme sind, die aus (4) entstehen, wenn dort A_2 bzw. A_1 Null gesetzt wird.

Im Bilde wurde an zwei Beispielen gezeigt, wie man einen sehr schmalen, langgestreckten Bereich abgrenzen kann, in dem die Eigenkurve verlaufen muß.

Die hier angestellten Überlegungen führen auf eine neuartige Berechnung der oberen und unteren Grenze kleinster Eigenwerte, worüber an anderer Stelle ausführlich berichtet werden soll. 482

Laminare Kanaleinlaufströmung.

Von *H. Schlichting* VDI in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Um nach schon mehrfach mit Erfolg angewandten Methoden[1]) die Berechnung der Turbulenzentstehung für die Strömung in einem Kanal mit parallelen Wänden durchführen zu können, ist es erforderlich, die Geschwindigkeitsprofile der laminaren Anlaufströmung im Kanal (ebenes Problem) mit einiger Genauigkeit zu kennen. Die früher von Prof. Schiller[2]) für die Berechnung der Anlaufströmung verwendete Methode geht anstatt von den Differentialgleichungen der Bewegung von dem Impulssatz aus. Dabei werden die Anlaufprofile durch zwei Parabelhälften an den Wänden und einen dazwischen liegenden Kern konstanter Geschwindigkeit angenähert. Den Widerstand im Anlauf, der ja ein Integralwert über den ganzen Anlauf ist, gibt diese Theorie in befriedigender Übereinstimmung mit den Versuchen; die Geschwindigkeitsprofile kann sie jedoch mit der für eine Stabilitätsuntersuchung erforderlichen Genauigkeit nicht liefern. Es wird deshalb im folgenden gezeigt, wie man diese direkt durch Integration der Bewegungsgleichungen erhalten kann.

*) L. Föppl: Über das Ausknicken von Gittermasten usw., ZAMM, Bd. 13, 1933, S. 1.

[1]) W. Tollmien: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1929 und H. Schlichting: Die Naturwissenschaften 1934, S. 376.

[2]) L. Schiller: Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Heft 248, 1922.

Eine Anlaufrechnung von G. Vogelpohl[3]), bei der die Differentialgleichung der Bewegung in eine Integralgleichung umgeformt wird, hat mit einer älteren Rechnung von Boussinesq[4]) das gemeinsam, daß beide Entwicklungen von hinten her sind, d. h. von der Poiseuilleschen Parabel als erster Näherung ausgehen und die Abweichungen von dieser berechnen. Ganz vorn, wo die Profile sich erst wenig von dem rechteckigen Eintrittsprofil unterscheiden, treten dann Konvergenzschwierigkeiten auf.

Für unsere Rechnung legen wir die x-Achse in die Kanalachse und die y-Achse in den Eintrittsquerschnitt. Wir machen dann, um den ganzen Anlauf mit guter Genauigkeit zu bekommen, zwei Entwicklungen: I. eine erste vom Einlauf $x=0$ und von den Wänden aus, und II. eine zweite asymptotische Entwicklung für große x von der Kanalmitte aus. In einem Querschnitt, wo beide Entwicklungen gelten, werden sie aneinander angeschlossen.

I. Ganz vorn, unmittelbar nach Eintritt der rechteckigen Geschwindigkeitsverteilung U_0 in den Kanal, bildet sich an den Wänden die Reibungsschicht nahezu so aus, wie es von Blasius für die tangentiell angeströmte Platte in der unendlichen Flüssigkeit berechnet wurde. Weiter stromabwärts jedoch wird die Entwicklung der Reibungsschicht durch die Beschleunigung der Kernströmung $U(x)$ immer stärker beeinflußt.

Das Rechenverfahren ist das in der Prandtlschen Grenzschichttheorie[5]) übliche. Von den beiden Bewegungsgleichungen wird nur die der Hauptströmungsrichtung berücksichtigt:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

($\nu=$ kin. Zähigkeit), wobei die Kernströmung $U(x)$ durch die Kontinuität

$$U(a-\delta^*)=U_0\cdot a \quad \left(\delta^*=\frac{1}{U}\int_0^a (U-u)\,dy=\text{Verdrängungsdicke};\ a=\text{halbe Kanalbreite}\right)$$

gegeben ist, oder

$$U=U_0\left\{1+\frac{\delta^*}{a}+\left(\frac{\delta^*}{a}\right)^2+\ldots\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Nach Blasius[6]) ist für die tangentiell angeströmte Platte in der unendlichen Flüssigkeit:

$$\frac{\delta^*}{a}=1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{a^2 U_0}}=1{,}73\,\varepsilon=K_2\,\varepsilon\,.$$

Man erhält also eine Entwicklung der Kernströmung nach Potenzen der für den Anlauf charakteristischen dimensionslosen Größe $\varepsilon=\sqrt{\dfrac{\nu x}{a^2 U_0}}$:

$$U=U_0\{1+K_2\varepsilon+K_3\varepsilon^2+\ldots\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2\text{a}).$$

Führt man noch für die y-Koordinate, wie bei Blasius, einen neuen Maßstab ein durch $\eta=\dfrac{1}{2\varepsilon}\left(1+\dfrac{y}{a}\right)$ (für negative y), so lassen sich Stromfunktion ψ und Geschwindigkeit u in den neuen Variablen ε und η folgendermaßen entwickeln:

$$\frac{\psi}{a\,U_0}=\varepsilon\,\zeta_1(\eta)+\varepsilon^2\,\zeta_2(\eta)+\ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\frac{u}{U_0}=\frac{1}{2}\{\zeta_1'(\eta)+\varepsilon\,\zeta_2'(\eta)+\ldots\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1) erhält man dann, wenn man nach Potenzen von ε ordnet, Differentialgleichungen für $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$

Die Differentialgleichung für die erste Näherung ζ_1 ist die schon von Blasius gelöste $\zeta_1\cdot\zeta_1''=-\zeta_1'''$ mit den Randbedingungen $\zeta_1=\zeta_1'=0$ für $\eta=0$ und $\zeta_1'=2$ für große η ($\eta=\infty$). Die Differentialgleichungen für die folgenden Näherungen sind sämtlich linear, inhomogen und von 3. Ordnung. Für die zweite Näherung erhält man

$$\zeta_2'''+\zeta_1\zeta_2''-\zeta_1'\zeta_2'+2\zeta_1''\zeta_2=-4K_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

mit den Randbedingungen:

$$\zeta_2=\zeta_2'=0 \quad \text{für } \eta=0\,,$$
$$\zeta_2'=2K_2 \quad \text{für } \eta=\infty\,.$$

[3]) G. Vogelpohl: ZAMM, Bd. 13, S. 466, 1933.
[4]) J. Boussinesq: Comptes Rendus, Bd. 113, S. 9 u. 49, 1891.
[5]) L. Prandtl: Verhdlg. d. III. Int. Math. Kongr., Heidelberg 1904.
[6]) H. Blasius: Z. Math. Phys., Bd. 56, 1908.

Tabelle I.

$\frac{\nu x}{a^2 U_0} = 0{,}0005$		$= 0{,}001$		$= 0{,}002$		$= 0{,}004$		$= 0{,}006$		$= 0{,}008$	
y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$
1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0	0
0,9911	0,151	0,9874	0,158	0,9821	0,166	0,9747	0,179	0,9690	0,187	0,9642	0,194
0,9821	0,297	0,9747	0,309	0,9642	0,326	0,9495	0,347	0,9380	0,362	0,9284	0,375
0,9732	0,438	0,9621	0,454	0,9464	0,477	0,9242	0,505	0,9070	0,525	0,8925	0,540
0,9642	0,569	0,9494	0,589	0,9285	0,613	0,8989	0,647	0,8760	0,670	0,8568	0,686
0,9553	0,686	0,9368	0,707	0,9106	0,734	0,8736	0,769	0,8450	0,792	0,8210	0,810
0,9464	0,786	0,9242	0,807	0,8927	0,835	0,8485	0,869	0,8140	0,892	0,7850	0,910
0,9374	0,868	0,9115	0,888	0,8748	0,914	0,8232	0,947	0,7830	0,969	0,7490	0,988
0,9285	0,928	0,8989	0,947	0,8570	0,971	0,7980	1,004	0,7520	1,026	0,714	1,043
0,9195	0,971	0,8862	0,990	0,8390	1,013	0,7725	1,045	0,721	1,067	0,678	1,086
0,9150	0,988	0,8799	1,005	0,8301	1,028	0,7600	1,060	0,705	1,085	0,660	1,104
0,9016	1,017	0,8610	1,034	0,8033	1,057	0,722	1,090	0,659	1,117	0,606	1,140
0,8927	1,028	0,8483	1,045	0,7853	1,067	0,697	1,100	0,628	1,127	0,570	1,150
0,866	1,037	0,811	1,053	0,732	1,074	0,621	1,108	0,535	1,134	0,463	1,158
0,821	1,038	0,747	1,054	0,642	1,075	0,495	1,109	0,380	1,136	0,284	1,160
0,600	1,038	0,600	1,054	0,600	1,075	0,400	1,109	0,200	1,136	0,200	1,160
0,400	1,038	0,400	1,054	0,400	1,075	0,200	1,109	0	1,136	0	1,160
0,200	1,038	0,200	1,054	0,200	1,075	0	1,109				
0	1,038	0	1,054	0	1,075						

Tabelle I (Fortsetzung).

$\frac{\nu x}{a^2 U_0} = 0{,}010$		0,012		0,016		0,020	0,024	0,028	0,032	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,150	∞
y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	y/a	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$	$\frac{u}{U_0}$
1,0	0	1,0	0	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9600	0,200	0,9561	0,226	0,9	0,413	0,387	0,369	0,355	0,346	0,338	0,329	0,321	0,310	0,302	0,292	0,285
0,9200	0,384	0,9122	0,395	0,8	0,731	0,697	0,672	0,653	0,640	0,626	0,611	0,599	0,581	0,568	0,551	0,540
0,8800	0,555	0,8685	0,566	0,7	0,962	0,933	0,911	0,893	0,879	0,863	0,846	0,833	0,811	0,797	0,778	0,765
0,8400	0,701	0,8245	0,715	0,6	1,100	1,087	1,079	1,070	1,062	1,048	1,033	1,020	1,001	0,989	0,971	0,960
0,8000	0,825	0,7810	0,838	0,5	1,197	1,200	1,198	1,194	1,189	1,180	1,171	1,163	1,151	1,143	1,132	1,125
0,7600	0,925	0,737	0,936	0,4	1,234	1,254	1,262	1,264	1,265	1,264	1,264	1,263	1,262	1,261	1,261	1,260
0,720	1,002	0,693	1,014	0,3	1,238	1,260	1,278	1,292	1,301	1,310	1,320	1,327	1,339	1,347	1,358	1,365
0,680	1,059	0,649	1,071	0,2	1,239	1,261	1,279	1,294	1,309	1,330	1,348	1,364	1,388	1,404	1,426	1,440
0,640	1,102	0,605	1,117	0,1	1,239	1,262	1,280	1,295	1,310	1,335	1,360	1,382	1,414	1,436	1,466	1,485
0,620	1,121	0,583	1,139	0	1,239	1,262	1,280	1,295	1,310	1,335	1,363	1,387	1,422	1,446	1,479	1,500
0,560	1,161	0,518	1,181													
0,520	1,172	0,474	1,193													
0,400	1,181	0,342	1,203													
0,200	1,183	0,123	1,206													
0	1,183	0	1,206													

Eine ähnlich gebaute Differentialgleichung ergibt sich für die dritte Näherung ζ_3, usf. Die Lösungen ζ_2, ζ_3 ... lassen sich in der Umgebung von $\eta = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, und für große η lassen sich asymptotische Lösungen angeben, ähnlich wie bei Blasius. Die vollständige Lösung für alle η ergibt sich daraus durch Zusammenfügung. Wir haben über das Blasiussche Glied hinaus zwei weitere Glieder ζ_2 und ζ_3 berechnet und das nächste ζ_4 abschätzend berücksichtigt; damit kommt man etwa bis $\varepsilon^2 = \dfrac{\nu x}{a^2 U_0} = 0{,}016$, wo $\left(\dfrac{u}{U_0}\right)_{\text{mitte}} = 1{,}239$, wo also der Anlauf etwa halb vollendet ist.

II. Für große Entfernungen vom Einlauf, wo das Profil sich schon allmählich der Poiseuilleschen Parabel nähert, machen wir eine nach ε^2, d. h. nach x asymptotische Entwicklung, indem wir setzen:

$$u = u_0 + u^*, \quad \text{wo} \quad \frac{u_0}{U_0} = \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{y^2}{a^2}\right\}$$

die Poiseuillesche Parabel ist und u^* eine Zusatzgeschwindigkeit, für die ein Ansatz

$$\frac{u^*}{U_0} = C_1\, e^{-\lambda_1 \varepsilon^2}\, \Psi_1'\left(\frac{y}{a}\right) + C_2\, e^{-\lambda_2 \varepsilon^2}\, \Psi_2'\left(\frac{y}{a}\right) + \dots \quad (6)$$

gemacht wird.

Unter Berücksichtigung nur der größten Glieder erhält man für Ψ_1 die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$\Psi_1'''' + 3\lambda\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\Psi_1'' + \Psi_1\right\} = 0 \quad (7)$$

mit λ als Eigenwert. Die Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich nach Potenzen von y/a entwickeln und ist durch die folgenden Randbedingungen eindeutig bestimmt:

$$y = 0: \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = 0: \quad \Psi_1 = \Psi_1'' = 0; \quad \text{und ferner} \quad \Psi_1' = 1,$$

da C_1 noch frei verfügbar ist.

$$y = \pm a: \quad u = v = 0: \quad \Psi_1 = \Psi_1' = 0.$$

Die Konstante C_1 wird dann noch dadurch bestimmt, daß für $\varepsilon^2 = 0{,}016$, wo sowohl die Entwicklung vom Einlauf her wie auch die von hinten her gilt, beide aneinander angeschlossen werden. Man findet $C_1 = -0{,}3485$ und $\lambda_1 = 18{,}75$, und es zeigt sich, daß man mit nur einem Glied der Entwicklung (6) praktisch auskommt.

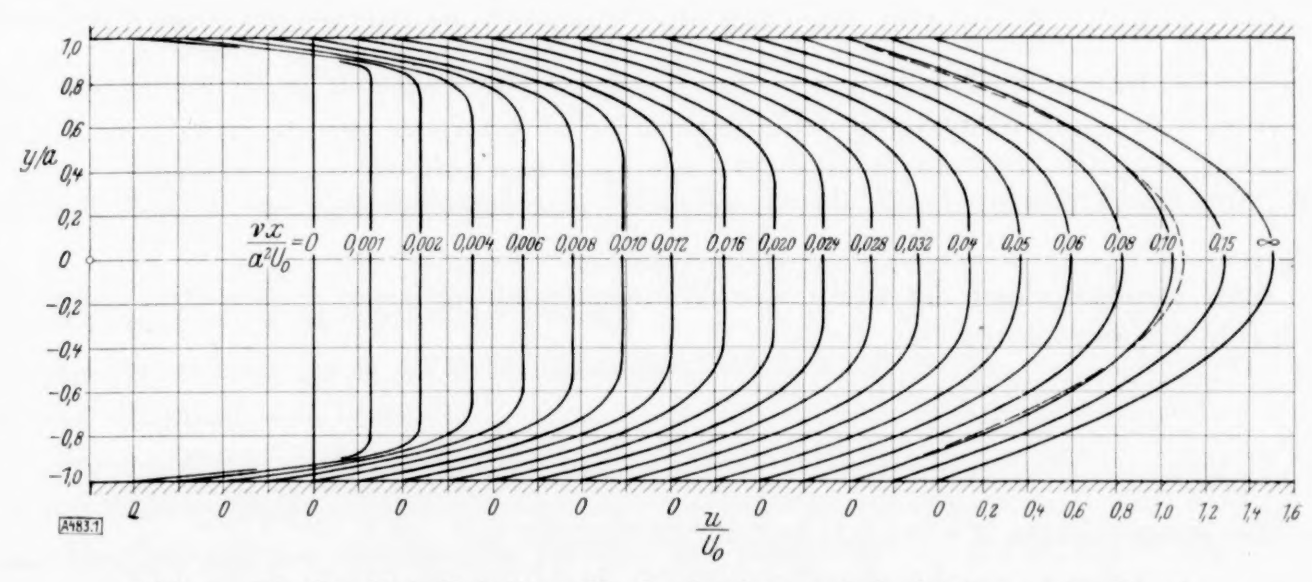


Abb. 1. Die Geschwindigkeitsprofile der laminaren Anlaufströmung im Kanal (gestrichelte Kurve = Poiseuillesche Parabel).

Die Resultate der Rechnung sind durch die nebenstehenden Abbildungen und Zahlentafeln wiedergegeben. In Abb. 1 und Tabelle I sind die Geschwindigkeitsprofile von $\dfrac{\nu x}{a^2 U_0} = 0{,}0005$ bis $0{,}016$ durch die Entwicklung vom Einlauf her erhalten, die übrigen durch die asymptotische Entwicklung für große x. Die ersten Profile der asymptotischen Rechnung zeigen noch deutlich die von der Reibung praktisch noch nicht erfaßte Kernströmung mit konstanter Geschwindigkeit in der Mitte.

Abb. 2 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit in Ebenen parallel zur Wand $y/a = \text{const.}$ Die Geschwindigkeit in der Mitte steigt von $\frac{u}{U_0} = 1$ mit vertikaler Tangente zuerst sehr schnell und dann langsamer an. Bei $\varepsilon^2 = \frac{\nu x}{a^2 U_0} = 0{,}15$ beträgt die Abweichung von der Asymptote nur noch rund 2%, hier ist der Anlauf also nahezu beendet. Nahe an der Mitte, $y/a = 0{,}1, = 0{,}2$, steigt die Geschwindigkeit monoton an bis zu dem asymptotischen Wert der Parabel; in größeren Abständen, bei $y/a = 0{,}5$ z. B., hat man zunächst Anstieg und später wieder Abfall. Das rührt daher, daß man sich bei kleinen Abständen vom Einlauf noch in der beschleunigten Kernströmung befindet und daher Geschwindigkeitsanstieg hat, während man in größeren Abständen vom Einlauf in die durch die Reibung verzögerte Schicht gelangt, so daß die Geschwindigkeit wieder abnimmt.

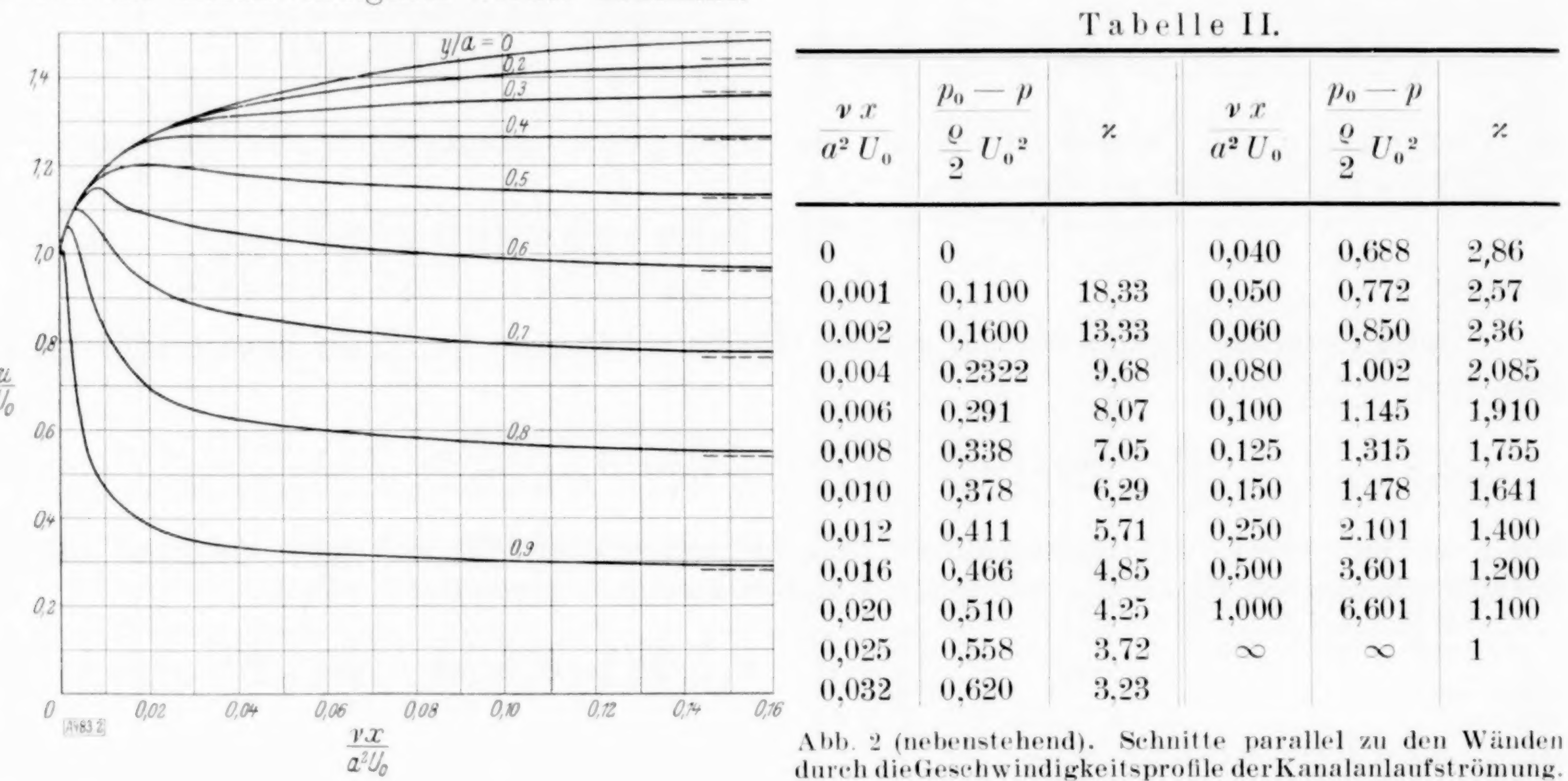


Tabelle II.

$\frac{\nu x}{a^2 U_0}$	$\frac{p_0 - p}{\frac{\varrho}{2} U_0^2}$	$\varkappa$	$\frac{\nu x}{a^2 U_0}$	$\frac{p_0 - p}{\frac{\varrho}{2} U_0^2}$	$\varkappa$
0	0		0,040	0,688	2,86
0,001	0,1100	18,33	0,050	0,772	2,57
0.002	0,1600	13,33	0,060	0,850	2,36
0,004	0.2322	9,68	0,080	1.002	2,085
0,006	0,291	8,07	0,100	1.145	1,910
0,008	0,338	7,05	0,125	1,315	1,755
0,010	0,378	6,29	0,150	1,478	1,641
0,012	0,411	5,71	0,250	2.101	1,400
0,016	0,466	4,85	0,500	3,601	1,200
0,020	0,510	4,25	1,000	6,601	1.100
0,025	0,558	3.72	∞	∞	1
0,032	0,620	3.23			

Abb. 2 (nebenstehend). Schnitte parallel zu den Wänden durch die Geschwindigkeitsprofile der Kanalanlaufströmung.

Ferner kann man noch den Druckverlauf ausrechnen. In Tabelle II ist der Druckunterschied zwischen irgendeiner Stelle x und dem Einlauf $x = 0$, wo $u = U_0$ ist, angegeben, und zwar dimensionslos $\frac{p_0 - p}{\frac{\varrho}{2} U_0^2}$ als Funktion von $\frac{x \nu}{a^2 U_0}$. Der Druck fällt zunächst sehr schnell ab, wie $\sqrt{x}$. Weiter hinten, wo der Anlauf beendet ist, hat man dann den linearen Poiseuilleschen Abfall. Wäre von vorn an die ausgebildete Strömung vorhanden, so hätte man einfach den linearen Abfall $\frac{p - p_0}{\frac{\varrho}{2} U_0^2} = -6 \frac{\nu x}{a^2 U_0}$. Der zusätzliche Druckverlust infolge der Beschleunigung im Anlauf beträgt $\Delta p = -0{,}601 \frac{\varrho}{2} U_0^2$ bezogen auf den Druck p_0 im Einlauf, wo $u = U_0$[7]).

Aus dem Druckverlauf ist noch der Widerstandskoeffizient λ ermittelt worden. Sei λ definiert durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{p_0 - p_1}{\frac{\varrho}{2} U_0^2} \frac{a}{x_1 - x_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

so ist für die ausgebildete Poiseuillesche Strömung $\lambda = \frac{6}{R}\left(R = \frac{U_0 a}{\nu}\right)$.

Infolge des Anlaufs ist der Widerstandskoeffizient größer. Schreiben wir

$$\lambda = \varkappa \frac{6}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

so ist $\varkappa$ ein von der dimensionslosen Anlauflänge $\varepsilon^2 = \frac{\nu x}{a^2 U_0}$ abhängiger dimensionsloser Faktor, der für große ε^2 gegen 1 gehen muß. In Tabelle II ist $\varkappa$ als Funktion von ε^2 angegeben für

[7]) Nach Mitteilung von Prof. Schiller ergibt seine Näherungsrechnung für den ebenen Fall $\Delta p = -0{,}614 \frac{\varrho}{2} U_0^2$, also nur sehr geringe Abweichung von unserer genauen Rechnung (beim Kreisrohr Näherungswert $\Delta p = -1{,}16 \frac{\varrho}{2} U_0^2$).

den Fall, daß die eine Druckmeßstelle (x_0) im Eintrittsquerschnitt $x = 0$ liegt. Für $\varepsilon^2 = 1{,}0$ weicht $\varkappa$ noch etwa 10% von seinem asymptotischen Wert ab. Liegt die eine Druckmeßstelle nicht gerade im Eintrittsquerschnitt, sondern an irgendeiner anderen Stelle im Anlaufgebiet, so läßt sich die entsprechende Widerstandszahl λ mit den gemachten Angaben leicht errechnen.

Schließlich kann man noch den Widerstand einer tangentiell laminar angeströmten ebenen Platte ausrechnen, die parallel zu den Kanalwänden in der Mitte eines Kanals der Breite 2a steht. Man findet für den Widerstandskoeffizienten:

$$c_w = \frac{1{,}328}{\sqrt{R_e}}\left\{1 + \frac{6{,}94}{\sqrt{R_e}}\frac{l}{a} - \frac{23}{R_e}\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \dots\right\} \quad \dots \dots \quad (10),$$

wo R_e die mit der Plattenlänge l gebildete Reynoldssche Zahl $\frac{U_0 l}{\nu}$ bedeutet $\left(c_w = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} U_0^2 F};\right.$ $\left. W = \text{Widerstand}, \ F = \text{benetzte Fläche}\right)$. Das erste Glied ist die bekannte Blasiussche Formel, die folgenden geben die Widerstandsvermehrung durch die endliche Kanalbreite. Sie können unter Umständen von beträchtlicher Größe sein.

Die hier für das ebene Problem durchgeführte Rechnung läßt sich ohne weiteres auf das rotationssymmetrische Problem der Rohreinlaufströmung übertragen. 483

Umkehrung von Integraltransformationen.

Von *Günther Schulz* in Berlin.

Bei der mathematischen Behandlung physikalischer und technischer Fragen wird man öfters auf Integraltransformationen der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \dots \dots \quad (1)$$

geführt. Meist handelt es sich um die Umkehrung dieser Transformationen, bei gegebenem Kern $K(x)$ und gegebener rechter Seite $f(x)$ die Funktion $y(x)$ zu bestimmen. Solche Integralgleichungen erster Art sind bereits mehrfach behandelt worden, ohne daß die Ergebnisse für die praktische Auflösung nutzbar gemacht worden sind.

Vorausgesetzt wird, daß $K(x)$ im Unendlichen genügend stark verschwindet. Fast immer ist $K(x)$ nichtnegativ und in den Veränderlichen x und ξ symmetrisch; es ist also $K(x) = K(-x)$. Ferner sei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi)\, d\xi = 1 \quad \dots \dots \quad (2).$$

Die Transformation ist also eine Mittelbildung mit der Gewichtsfunktion $K(x)$. Die Funktionen $y(x)$ und $f(x)$ sollen periodisch mit der Periode 2π sein.

Den im folgenden angegebenen Beispielen ist gemeinsam, daß das Kurvenbild $y(x)$ einer physikalischen Größe durch örtliche oder zeitliche Nachbareinflüsse „verundeutlicht" wird, so daß bei der Kurve $f(x)$ die Maxima von $y(x)$ erniedrigt und die Minima erhöht sind, und zwar um so weniger, je ausgeprägter das Maximum von $K(x)$ an der Stelle $x = 0$ ist.

Beispiele:

I. Schwärzung photographischer Schichten	$K(x) = c\, e^{-\varkappa\, \lvert x \rvert}$
II. Optische Abbildung eines selbstleuchtenden Objekts mit Berücksichtigung der Beugung[1])	$K(x) = c\left(\frac{\sin \varkappa x}{\varkappa x}\right)^2$
III. Wirkung des Dopplereffekts auf die Intensitätsverteilung im Spektrum[2])	$K(x) = c\, e^{-\varkappa^2 x^2}$
IV. Verundeutlichung des Spektrums infolge der endlichen Breite des Spektrometerspalts, Verfälschung der aufgenommenen Intensitätskurve im Spektrum infolge der endlichen Breite des Bolometerstreifens[3])	$K(x) = 0$, für $-\infty \dots -a$; $= \frac{1}{2a}$, für $-a \dots +a$; $= 0$, für $+a \dots +\infty$.

[1]) Vgl. L. Mandelstam: Festschrift Heinrich Weber gewidmet, Leipzig und Berlin 1912, S. 228 bis 241.

[2]) Dieses Problem ist bereits von G. Doetsch erschöpfend behandelt worden: Ztschr. f. Phys. **49**, 1928, S. 705 bis 730.

[3]) Das Problem IV ist von C. Runge behandelt worden: Ztschr. f. Math. u. Phys. **42**, 1897, S. 205 bis 213. In der hier verwendeten Ausdrucksweise wird dort die Integralgleichung (1) mit dem zum Kern (IV) gehörigen zweiten iterierten Kern betrachtet und ihre Lösung in einer nach geradzahligen Ableitungen von f fortschreitenden Reihe angegeben. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß es sich schwer auf andere Kerne übertragen läßt und auch über die Eindeutigkeit der Lösung keine Auskunft gibt.

Auch viele Probleme des Wärmeausgleichs sowie Nachwirkungserscheinungen an Registrierinstrumenten gehören hierher.

Die Behandlung der Gl. (1) wird übersichtlicher, wenn an Stelle von $K(x)$ ein periodisierter Kern $\tilde{K}(x)$ eingeführt wird, der durch

$$\tilde{K}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} K(x + 2\pi\nu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

definiert ist. Nach einer weiteren leichten Umformung ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{K}(\varrho - x)\, y(\xi - \varrho)\, d\varrho = f(\xi - x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Alle drei Funktionen $\tilde{K}(x)$, $y(x)$, $f(x)$ sind „zyklisch", hängen also nur von der Differenz zweier Veränderlichen ab und sind in dieser Differenz periodisch mit der Periode 2π. Man sieht, daß es im wesentlichen dasselbe Problem ist, $\tilde{K}$ aus f und y wie y aus $\tilde{K}$ und f zu bestimmen. Wirken zwei Einflüsse, gekennzeichnet durch die Kerne $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$, dann ist der durch Komposition entstehende Kern

$$\tilde{K}(\xi - x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{K}_1(\varrho - x)\, \tilde{K}_2(\xi - \varrho)\, d\varrho = \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{K}_2(\varrho - x)\, \tilde{K}_1(\xi - \varrho)\, d\varrho \quad \ldots \quad (5)$$

einzuführen, der ebenfalls zyklisch ist. Gl. (5) hat übrigens denselben Bau wie Gl. (4).

Bei der praktischen Durchführung der Rechnung benutzt man entweder die Werte der vorkommenden Funktionen an n äquidistanten Stellen im Intervall $-\pi \ldots +\pi$ oder deren Fourierentwicklungen. Im ersten Fall wird man auf die Gleichung $\mathfrak{K}\mathfrak{Y} = \mathfrak{F}$ geführt, in der sämtliche Matrizen zyklisch sind. (Eine n-reihige Matrix heißt zyklisch, wenn die Elemente nur von der Differenz der Indizes abhängen und wenn die Elemente, deren Indizes kongruent mod n sind, gleich sind.) Systeme linearer Gleichungen mit zyklischer Matrix sind bequem auflösbar und deren Eigenwerte leicht angebbar. Die durch $\mathfrak{K}\mathfrak{X}_\nu = \varkappa_\nu \mathfrak{X}_\nu$ definierten Eigenmatrizen einer symmetrischen, zyklischen Matrix $\mathfrak{K}$ sind von $\mathfrak{K}$ unabhängig. Dem entspricht, daß ein symmetrischer, zyklischer Kern stets $\cos \nu x$ und $\sin \nu x$ zu Eigenfunktionen hat.

Bei Benutzung der Fourierentwicklungen gilt für die Koeffizienten bei passender Bestimmung der Konstanten

$$k_\nu\, y_\nu' = f_\nu', \qquad k_\nu\, y_\nu'' = f_\nu'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Dabei sind k_ν, y_ν', f_ν' die Kosinuskoeffizienten von $\tilde{K}(x)$, $y(x)$, $f(x)$ und y_ν'', f_ν'' die Sinuskoeffizienten. Das trigonometrische Polynom n-ten Grades mit den so bestimmten Koeffizienten gibt die beste Approximation im Mittel. Mit $y(x)$ ist auch $y(x) + h(x)$ eine Lösung von Gl. (1), wenn $h(x)$ eine Lösung der zu Gl. (1) gehörigen homogenen Gleichung mit verschwindender rechter Seite ist. Da dieser die Beziehungen

$$k_\nu\, h_\nu' = 0, \qquad k_\nu\, h_\nu'' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

zwischen den Fourierkoeffizienten von $\tilde{K}(x)$ und $h(x)$ entsprechen, so ist die Lösung von Gl. (1) immer dann vieldeutig, wenn in der Fourierentwicklung von $\tilde{K}(x)$ verschwindende Koeffizienten vorkommen.

Der Fall aperiodischer Funktionen kann meistens auf den hier behandelten Fall der Periodizität zurückgeführt werden, da die in den Anwendungen vorkommenden Funktionen außerhalb eines genügend großen Intervalles gleich Null angenommen werden dürfen.

Eine ausführliche Darstellung mit durchgerechneten Beispielen soll erscheinen. 484

Kavitationsversuche am Massachusetts Institute of Technology und ihre Deutung.

Von *E. W. Spannhake* in Karlsruhe.

Es wird besonders die in Cambridge gründlich studierte Periodizität der Kavitation hervorgehoben. Ein Film wird vorgeführt, in dem gezeigt wird, daß das Totalvolumen der Kavitation periodisch als Ganzes gebildet wird und als Ganzes zusammenstürzt. Entgegen der bisher üblichen Auffassung der Bildung, des Stromabtransportes und darauffolgenden

Zusammensturzes von Einzelblasen wird die Vermutung ausgesprochen, daß der hier beobachtete Vorgang ein für die Kavitation genereller sei. Es wird gezeigt, daß schlagartige Erschütterungen von der Periode der zusammenstürzenden Totalvolumina elektrisch gemessen werden können, und daß der Materialschaden tatsächlich nur an den Stellen auftritt, wo dieser Zusammensturz im Film beobachtet werden konnte. Versuche haben ergeben, daß die folgende Abhängigkeit der charakteristischen Größen der Kavitation von der Geschwindigkeit besteht. (Natürlich vorausgesetzt, daß der Kavitationszustand, d. h. der Ort des Zusammensturzes derselbe bleibt.)

1. Der Energieverlust, verursacht durch die Kavitation, ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit.

2. Die Frequenz der zusammenstürzenden Totalvolumina ist der Geschwindigkeit direkt proportional.

3. Verkleinert oder vergrößert man den Strömungsraum im Gebiete der Kavitation ähnlich, so ist die Frequenz umgekehrt proportional einer Länge.

Ferner wurde festgestellt:

Die Gestaltung des vor und hinter der Versuchsstrecke liegenden Rohrsystems, seine elastischen und trägen Konstanten haben keinen Einfluß auf die Frequenz.

Aus allen diesen Gründen wird die Ansicht ausgesprochen, daß die Ursache des periodischen Charakters eine hydrodynamische und keine thermodynamische sein müsse, da ja die Gesetze der mechanischen Ähnlichkeit als gültig festgestellt wurden, und daß diese Ursache allein im Kavitationsgebiet selber, nicht aber in dem davor- oder dahinterliegenden Rohrsystem liegt. Als tatsächliche Ursache wird der labile Charakter der bei Dampfbildung vom Profil abgelösten Strahles vermutet, der bei geringer Druckerhöhung an der Ursprungsstelle sofort für eine gewisse kleine Zeit wieder zum Anliegen kommt und so eine Art „plunger" stromabwärts jagt, der dann das alte Kavitationsvolumen zerquetscht. Als Grund dieser periodischen Druckerhöhung wird im beobachteten Fall der periodische Zusammensturz des alten Volumens angegeben, im allgemeinen Fall aber vermutet, daß jede starke Verzögerung des „plungers" rückwirkend auf die Ursprungsstelle der Kavitation als momentane Druckerhöhung wirken kann. Es wird gezeigt, daß, während der „plunger" stromabwärts läuft, neues Wasser aus dem Hauptstrahl in ihn hineinströmt und so seine Masse ständig vergrößert. Der Materialschaden wird in Verbindung gebracht mit der verfügbaren kinetischen Energie des „plungers" und mit der Art und Weise, wie er auf die kompakte Wassermasse stromabwärts unter Zerquetschung des alten Kavitationsvolumens auftrifft. Die Möglichkeit wird erörtert, den Einfluß der Profilformen auf die Ausbildung des „plungers" systematisch zu studieren und auf diese Weise vielleicht Konstruktionsvorschriften zur Vermeidung besonders gefährlicher Formen zu gewinnen. 486

Ein Kriterium der Instabilität von laminaren Geschwindigkeitsverteilungen.

Von *W. Tollmien* in Göttingen.

Schon in den Anfangszeiten der Turbulenzforschung ist die Entstehung der Turbulenz auf eine Instabilität der Laminarströmung zurückgeführt worden. Doch blieb dieser Gesichtspunkt lange Zeit nur Programm. Erst in den letzten 5 Jahren gelang es, die Stabilitätsgrenze von einigen Laminarströmungen zu berechnen. So erfreulich das Ergebnis dieser Untersuchungen ist, so muß man doch sagen, daß sie sich durchweg auf sehr spezielle Geschwindigkeitsprofile beziehen. Es besteht in diesem Gebiet ein fühlbarer Mangel an allgemeinen Theoremen, die eine rasche Klassifikation von Geschwindigkeitsprofilen hinsichtlich ihrer Stabilität gestatten. Im folgenden soll nun ein solches sehr allgemeines Instabilitätskriterium aufgestellt werden.

Wir betrachten zweidimensionale Strömungen, in denen überdies die Geschwindigkeit im wesentlichen nur von der Koordinate y quer zur Strömung abhängen soll. Als ersten Typus ziehen wir Profile in Betracht, die etwa in schwach divergenten Kanälen auftreten können und symmetrisch zur Mitte sind (Abb. 1, U_{max} = maximale Geschwindigkeit, b = halbe Kanalbreite). Wir schließen aber Profile mit Rückströmung oder Ablösung aus. Im übrigen sind die Profilformen wenig beschränkt. Vor allem kann in jeder Profilhälfte gerade ein

Wendepunkt auftreten. Als zweiten praktisch besonders wichtigen Typus betrachten wir Grenzschichtprofile (Abb. 2, δ = Grenzschichtdicke).

Diesen Strömungen werden Störungen überlagert, die gemäß der Methode der kleinen Schwingungen als Wellen, die sich in der Strömungsrichtung x fortpflanzen, angenommen werden. Auch die Störungen sollen zweidimensional sein, was nach einer neueren Untersuchung von H. B. Squire keine Einschränkung bedeutet. Die Störungsbewegung läßt sich dann durch eine Stromfunktion beschreiben. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit kann die Störung aus Partialstörungen aufgebaut werden. Die Stromfunktion einer Partialstörung ist in komplexer Schreibweise $\varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}$; α (reell) $= \frac{2\pi}{\lambda}$, λ Wellenlänge; β (komplex) $= \beta_r + i\,\beta_i$, β_r zeitliche Kreisfrequenz, $-\beta_i$ logarithmisches Dekrement, $\beta_i > 0$ bei Anfachung; $c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + i\,c_i$, c_r Wellengeschwindigkeit.

In erster asymptotischer Näherung für sehr große Reynoldssche Zahlen kann man, wie im einzelnen gezeigt wird, das explizite Auftreten der inneren Reibung unterdrücken. Freilich kann man dann nicht mehr eine kritische Reynoldssche Zahl berechnen. Dagegen erhält man gute Auskunft über die Existenz und die Eigenschaften der gefährlichen angefachten Störungen.

Mathematisch formuliert lautet das Problem so. $U(y)$ stelle die Grundströmung dar. Dann ist die Differentialgleichung

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi - \frac{U''}{U - c}\, \varphi = 0$$

Abb. 1.

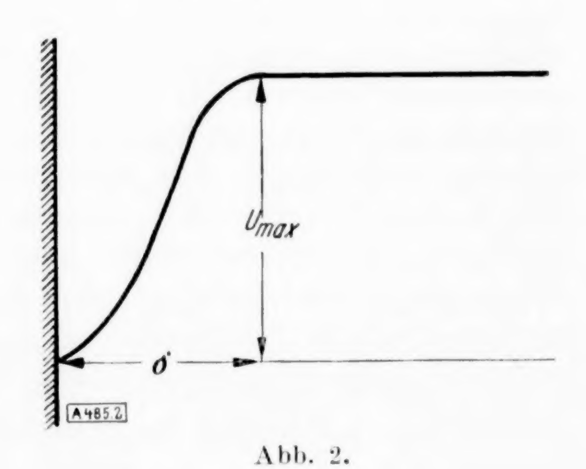


Abb. 2.

mit den Randbedingungen $\varphi = 0$ an beiden Rändern (Wände oder das Unendliche) zu lösen. Dies Randwertproblem ist ungewöhnlich. Die reelle Größe α ist als gegeben anzusehen. c wird aus einem nichtlinearen Randwertproblem bestimmt. Nicht zu jedem α existiert eine Lösung, obwohl c komplex sein kann.

Wenn man von der vertieften Begründung des Problems durch asymptotische Betrachtungen für sehr große Reynoldssche Zahlen absieht, so ist das eben formulierte Problem keineswegs neu. Bereits im Jahre 1880 veröffentlichte Lord Rayleigh eine Untersuchung, die ein wichtiges Resultat lieferte. Lord Rayleigh zeigte, daß Profile ohne Wendepunkt im oben formulierten Sinne stabil sind. Obwohl Lord Rayleigh selbst immer wieder (bis ins Jahr 1913) dies Problem angriff und nach ihm andere Forscher in verschiedenen Ländern diese Bemühungen fortsetzten, gelang dennoch keine Aussage über Profile mit Wendepunkt. Für diese stellen wir nun den einfach auszusprechenden Satz auf, daß sie sämtlich instabil sind. Dieser Effekt enthält die innere Reibung nicht explizite und ist daher bedeutend stärker als die Anfachung, die bei manchen Profilen ohne Wendepunkt in zweiter asymptotischer Näherung durch eine kleine Reibungskorrektur erhalten wurde. Zweifellos spielt dieser Effekt bei der Entstehung der Turbulenz eine fundamentale Rolle.

Über dies erstaunlich umfassende Theorem hinaus werden im Verlauf des Existenzbeweises in gewissem Umfange auch allgemeine Formeln für die Größe der Anfachung aufgestellt.

KLEINE MITTEILUNGEN

Mathematische Theorie des Schwingenfluges II. Den Ausführungen im ersten Teil meiner Arbeit über den Schwingenflug (vgl. diese Zeitschrift Bd. 14 S. 163 bis 172) sei unter Beibehaltung der Bezeichnungen dieser Arbeit noch folgende kurze Ergänzung hinzugefügt:

Die wichtigste Frage ist die nach dem V o r t r i e b, der durch den schwingenden Flügel erzeugt wird, weil von ihm in erster Linie der Erfolg der ganzen Vorrichtung abhängt. Es soll daher im folgenden eine Näherungsformel für den reinen mittleren Vortrieb $\overline{V}$, also den Vortrieb ohne Widerstandsbestandteile, hergeleitet werden, die den Vorzug außerordentlicher Kürze und Einfachheit besitzt:

Unter gewissen, unten näher angegebenen Voraussetzungen gilt für den reinen mittleren Vortrieb $\overline{V}$ näherungsweise:

$$\overline{V} = \frac{\varrho\, b^2\, h^2\, \nu^2}{8\,\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Zum Beweise formen wir die a. a. O. angegebene Ausgangsformel für den mittleren Vortrieb $\overline{T}$ (der den Widerstandsanteil noch mit umfaßt):

$$\overline{T} = \frac{\varrho\,\nu\,v\,b}{4\,\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi}[\pi\,v\,t\,\alpha^*(\alpha^*+\alpha) - 2\,\alpha\,\Gamma]\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau$$

wie folgt um: Wegen

$$\Gamma = \pi\,v\,t\,\alpha^* + \frac{\pi\,t^2}{4}\,\frac{\partial\,\alpha^*}{\partial\,\tau} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist

$$\overline{T} = \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b}{4}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi}\left[t\,\alpha^{*2} - t\,\alpha\,\alpha^* - \frac{\alpha\,t^2}{2\,v}\,\frac{\partial\,\alpha^*}{\partial\,\tau}\right]\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau\,.$$

Machen wir nun die Annahme, daß $t\,\frac{\partial\,\alpha^*}{\partial\,\tau}$ klein gegen v ist, was bei nicht zu schnellen Schwingungen einigermaßen zutreffen dürfte, so kann im Integral näherungsweise Γ durch $\pi\,v\,t\,\alpha^*$ ersetzt werden, so daß man erhält:

$$\overline{T} = \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b}{4}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi} t\,\alpha^*(\alpha^* - \alpha)\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau$$

$$= \frac{\varrho\,\nu\,v\,b}{4\,\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi}\Gamma(\alpha^* - \alpha)\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau\,.$$

In analoger Weise kann der Ausdruck für den mittleren Auftrieb vereinfacht werden und liefert:

$$\overline{A} = \frac{\varrho\,\nu\,v\,b}{4\,\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi}\Gamma\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir stellen nun die analoge Frage, die in der gewöhnlichen Tragflächentheorie die elliptische Auftriebsverteilung liefert, nämlich die F r a g e n a c h d e m m a x i m a l e n m i t t l e r e n V o r t r i e b b e i f e s t v o r g e g e b e n e m m i t t l e r e m A u f t r i e b.

Wegen (3) ist, wenn $\Gamma = 2\,b\,v\cdot\sum\limits_1^{\infty} A_n(\tau)\sin n\,\varphi$:

$$\overline{A} = \frac{\varrho\,v\,\nu\,b}{4\,\pi}\cdot 2\,b\,v\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}} A_1\,d\tau\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\varrho\,v\,v^2\,b^2}{4}\cdot\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}} A_1\,d\tau\,,$$

und somit wegen

$$\alpha^* = \alpha - \frac{h\,\nu\cos\nu\tau\,|\cos\varphi|}{v} - \sum^{\infty} n\,A_n(\tau)\,\frac{\sin n\,\varphi}{\sin\varphi}\,,$$

$$\overline{T} + \varkappa\,\overline{A} =$$

$$\frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b^2}{4\,\pi}\left\{\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\int\limits_0^{\pi} 2\sum_1^{\infty} A_n\sin n\,\varphi\left(-\frac{h\,\nu\cos\nu\tau\,|\cos\varphi|}{v}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_1^{\infty} n\,A_n\,\frac{\sin n\,\varphi}{\sin\varphi}\right)\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau + \varkappa\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\pi\,A_1\,d\tau\right\}$$

$$= \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b^2}{4\,\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\left(\frac{4\,h\,\nu\cos\nu\tau}{v}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}A_n}{n^2-4}\right.$$

$$\left. - 2\sum_1^{\infty} n\,A_n^2\cdot\frac{\pi}{2} + \varkappa\,\pi\,A_1\right)d\tau\,.$$

Damit dies ein Maximum werden kann, muß

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\,h\,\nu\cos\nu\tau}{3\,\pi\,v} + \frac{\varkappa}{2} \\ A_n &= \frac{2\,h\,\nu\cos\nu\tau\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi\,v\,n\,(n^2-4)} \qquad (n = 3, 5, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sein. Danach schwingt also die Zirkulation um die durch den Mittelwert von A_1 gegebene elliptische Verteilung herum, was außerordentlich plausibel erscheint. Der Vortrieb selbst wird, wenn man jeweils den konstanten Bestandteil wegläßt, der den üblichen induzierten Widerstand liefert,

$$\overline{V} = \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b^2}{4\,\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\left(2\,\pi\sum_1^{\infty} n\,A_n^2 - \pi\sum_1^{\infty} n\,A_n^2\right)d\tau$$

$$= \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b^2}{4}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\sum_1^{\infty} n\,A_n^2\,d\tau$$

$$= \frac{\varrho\,\nu\,v^2\,b^2}{4}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}\sum_1^{\infty}\frac{4\,h^2\,\nu^2\cos^2\nu\tau}{\pi^2\,v^2\,n\,(n^2-4)^2}\,d\tau$$

$$= \frac{\varrho\,\nu\,b^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{\nu}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n\,(n^2-4)^2}\cdot h^2\,\nu^2.$$

Die Berechnung der unendlichen Summe liefert genügend genau den Wert $\frac{1}{8}$, so daß schließlich (1) entsteht, wie behauptet wurde.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß dieser Näherungswert, der i. a. größere Werte liefert als die a. a. O. angegebenen Formeln, nur dann erreicht werden kann, wenn

1. $t\,\frac{\partial\,\alpha^*}{\partial\,\tau}$ klein gegen v ist, also die Schwingungen nicht zu rasch sind,
2. Flügeltiefe t und Anstellwinkel α gemäß Formel (2) in ihrer räumlich zeitlichen Veränderlichkeit dem durch (4) gegebenen Gesetz für die Zirkulation angepaßt werden, was aber möglich erscheint.

Bemerkenswert an der Formel (1) ist vor allem die Unabhängigkeit von v und α.

Breslau. Werner S c h m e i d l e r. 464

Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Wellenleitungen durch Teilung der Feder in den Knotenpunkten. Um für die Berechnung der Eigenfrequenzen von Wellenleitungen eine anschauliche Rechnungsmethode zu geben, wurde von H. Wydler[1]) das gegebene n-Massensystem durch Teilung der Massen auf n-1 Zweimassensysteme zurückgeführt, welche alle mit der gleichen Eigenschwingungszahl schwingen. Eine andere anschauliche Methode gibt O. Föppl[2]) an, welcher außer den Massen noch die Federlängen teilt und dadurch das n-System durch $2n$-2 Einmassensysteme ersetzt.

Vernachlässigt man den Einfluß der Wellenmasse, so genügt eine Teilung der Federlängen, um das gegebene System auf n-Einmassensysteme zurückzuführen. Das Schwingungsbild sei gegeben; dann ist auch die Lage der Knotenpunkte bekannt, welche man als Einspannstellen auffassen kann. Das System zerfällt in n-Einmassensysteme nach Abb. 1,

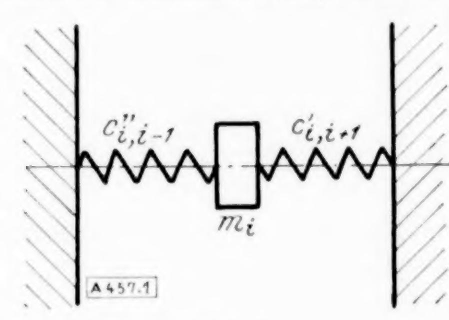


Abb. 1.

die alle mit der gleichen Eigenschwingungszahl ω schwingen. Für die Anordnung nach Abb. 1 gilt die Differentialgleichung

$$m_i\,\ddot{\varphi}_i + (c''_{i-1,\,i} + c'_{i,\,i+1})\,\varphi_i = 0\,.$$

Darin sind m_i die i^{te} Masse, $c''_{i-1,\,i}$ bzw. $c'_{i,\,i+1}$ die Federkonstanten bezogen auf die Einspannstellen (Knotenpunkte). Dann gilt für die Eigenschwingungszahl

$$\omega = \sqrt{\frac{c''_{i-1,\,i} + c'_{i,\,i+1}}{m_i}}\,.$$

Zu bemerken ist nur noch, daß die Federkonstanten sowohl positiv als auch negativ sein können (vgl. Rausch[3])), je nachdem ob der Schwingungsknoten in bezug zur Masse auf seiten der Feder oder auf der entgegengesetzten Seite zu liegen kommt. Sind Drehschwingungen zu berechnen und bezieht man sich auf ein konstantes I_p (Trägheitsmoment des Querschnittes), dann ist, wenn $l''_{i-1,\,i}$, $l'_{i,\,i+1}$ die zu $c''_{i-1,\,i}$, $c'_{i,\,i+1}$ zugehörigen Federlängen sind,

$$c''_{i-1,\,i} = \frac{G\,I_p}{l''_{i-1,\,i}}\,;$$

$$\omega^2 = G I_p\left(\frac{1}{l''_{i-1,\,i}\,m_i} + \frac{1}{l'_{i,\,i+1}\,m_i}\right),$$

und die Knotenpunkte sind nun so zu bestimmen, daß

$$\frac{1}{l''_{i-1,\,i}\cdot m_i} + \frac{1}{l'_{i,\,i+1}\cdot m_i} = \text{const} \quad . \; . \; (1)$$

wird. Es ist somit ein Probierverfahren gegeben, um die Eigenschwingungszahl zu erhalten. Man braucht nur die Schwingungsform und damit die Knotenpunkte so lange zu ändern, bis die Konstante in Gl. (1) für alle Massen die gleiche geworden ist.

Wien. Fritz Söchting. 457

[1]) H. Wydler: Drehschwingungen in Kolbenmaschinen und die Gesetze ihres Ausgleiches. Berlin 1922.

[2]) O. Föppl: Dreh- und geradlinige Schwingungen von Wellen und Massen. ZAMM 1921, S. 367.

[3]) E. Rausch: Graphisches Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen bei mehrgliedriger Schwingungsanordnung. Ingenieurarchiv 1930, S. 203.

Über die Form eines Pfeilers gleicher Festigkeit bei gleichzeitiger Druck- und Biegebeanspruchung. Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, wie bei einem Pfeiler, der außer durch sein Eigengewicht noch durch eine an seinem oberen Ende angreifende Kraft belastet ist, die Breite sich mit der Höhe ändern muß, wenn die maximale Druckspannung in allen Querschnitten die gleiche sein soll („Pfeiler gleicher Festigkeit"). Der Pfeiler soll dabei rechteckigen Querschnitt haben; die Ebene durch die Pfeilerachse und die Einzelkraft am oberen Ende gehe durch die eine Symmetrieachse des Rechtecks, senkrecht zu dieser Ebene habe das Rechteck eine konstante Tiefe, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich eins annehmen wollen.

1. Am oberen Ende wirke eine horizontale Kraft P. Ist y die gesuchte Breite des Querschnitts und γ das spezifische Gewicht des Pfeilermaterials, so ist

$$Q = \int_0^x \gamma\, y\, d\,x\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

das Eigengewicht, das auf einem Schnitt in der Entfernung x unter dem oberen Ende lastet (siehe Abb. 1). Dasselbe erzeugt eine Druckspannung $\frac{Q}{y}$;

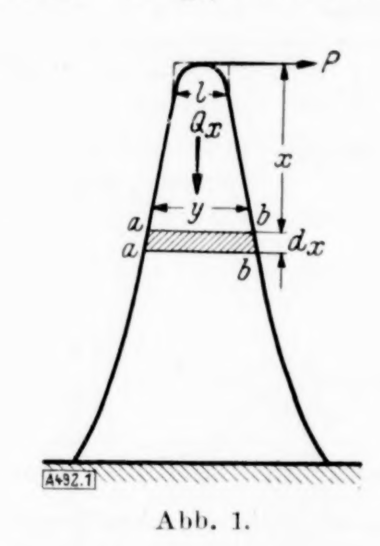


Abb. 1.

zu dieser kommt die Druckspannung infolge der Biegungswirkung der Einzelkraft $\frac{6\,P\,x}{y^2}$. Soll die maximale Druckspannung R für alle x dieselbe sein, so muß

$$\frac{Q\,(x)}{y} + \frac{6\,P\,x}{y^2} = R = \text{const}\,. \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

werden. Multiplizieren wir (2) mit y und differenzieren, so erhalten wir

$$\gamma\, y\, d\,x - \frac{6\,P\,x\,d\,y}{y^2} + \frac{6\,P\,d\,x}{y} = R\,d\,y \quad . \; (3)$$

bzw. wenn zur Abkürzung

$$a^2 = \frac{\gamma}{6\,P} \qquad b = \frac{R}{6\,P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

gesetzt wird,

$$y\,(1 + a^2\,y^2)\,d\,x - (x + b\,y^2)\,d\,y = 0 \quad (5).$$

Für diese Differentialgleichung findet man einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor

$$\mu\,(y) = \frac{1}{y^2\sqrt{1 + a^2\,y^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

mit dessen Hilfe man das Integral von (5) zu

$$\frac{x\sqrt{1 + a^2\,y^2}}{y} - \frac{b}{a}\ln\left\{y + \sqrt{\frac{1}{a^2} + y}\right\} = c\,. \quad . \; (7)$$

ermittelt. Die Integrationskonstante c ermittelt man aus der Bedingung, daß für $x=0$ nach Gl. (2) mit $Q=0$ sowohl y als $\frac{x}{y}$ verschwinden müssen. Das ergibt

$$c=\frac{b}{a}\ln a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

also wird

$$x=\frac{b}{a}\,\frac{y}{\sqrt{1+a^2 y}}\ln\left\{a y+\sqrt{1+a^2 y^2}\right\} \quad . \quad . \quad (9).$$

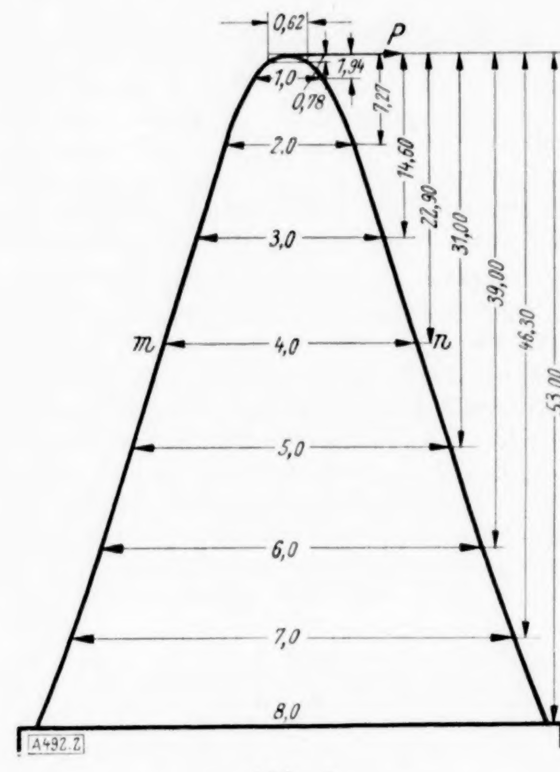


Abb. 2.

Man trägt der in der Biegungstheorie vernachlässigten Schubspannung Rechnung, indem man die Breite am oberen Ende nicht auf Null abnehmen läßt, sondern dem obersten Stück eine durch die zulässige Schubspannung R_s bestimmte konstante Breite t gibt. Abb. 2 stellt das Ergebnis für ein numerisches Beispiel dar, welchem die Zahlenwerte

$$\left.\begin{array}{ll}\gamma=2\,\dfrac{to}{m^3} & R=100\,\dfrac{to}{m^2}\\[2ex] R_s=20\,\dfrac{to}{m^2} & P=\dfrac{25}{3}\,to\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

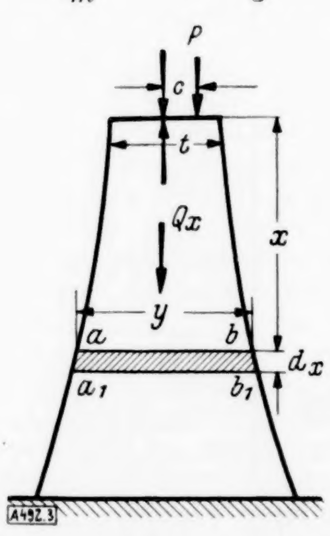


Abb. 3.

zugrunde liegen. Die Gewichtsersparnis gegenüber einem prismatischen Körper gleicher Breite ist bedeutend. Vergleicht man in Abb. 2 den oberhalb des Schnittes $m-n$ liegenden Teil mit einem Körper konstanter Breite, so ist bei gleicher maximaler Druckspannung das Gewicht des Körpers gleicher Festigkeit um 46 % geringer als das Gewicht des prismatischen Körpers.

2. Am oberen Ende wirke eine vertikale Kraft P in der Entfernung c von der Mitte (Abb. 3). Die größte Druckspannung wird

$$\frac{Q(x)+P}{y}+\frac{6\,P\,c}{y^2}=R=\text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Nach Multiplikation mit y und Differentiation ergibt sich

$$\gamma\,y\,d\,x-\frac{6\,P\,c\,d\,y}{y^2}=R\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

was sich ohne weiteres integrieren läßt; die auftretende Integrationskonstante bestimmt sich aus der Bedingung, daß am oberen Ende $x=0$, wo $Q=0$ ist, nach Gl. (11) die Breite t durch die Gleichung

$$\frac{P}{t}+\frac{6\,P\,c}{t^2}=R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

bestimmt ist. Mit dem aus (13) zu ermittelnden Werte von t erhält man

$$x=\frac{R}{\gamma}\ln\frac{y}{t}+\frac{3\,P\,c}{y}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{y^2}\right) \quad . \quad (14).$$

Kiew. W. Swida. 492

Graphische, näherungsweise Bestimmung von Kippziffern mittels der Seilkurve. Für viele praktisch vorkommende Kippfälle ist es noch unmöglich, die genaue Kipplast anzugeben. So z. B. für die Belastung mit mehreren Einzelkräften, Einzelmomenten und für sprungweise veränderliche Steifigkeiten. In den meisten Fällen ist die Differentialgleichung des Problems gegeben. Ist diese Differentialgleichung für den Kippwinkel Φ von zweiter Ordnung und linear, dann läßt sich — wenn die Randbedingungen durch Φ allein ausdrückbar sind — aus einer Näherung Φ_n für den wahren Verlauf von Φ mittels der Seilkurve eine verschärfte Näherung Φ_{n+1} gewinnen. Aus Φ_n und Φ_{n+1} wird hier durch „Vergleich der Ordinatenflächen" ein Näherungswert für die Kippziffer gefunden [1]. — Dies ist auch möglich, wenn eine die Verdrehung einzelner Querschnitte hindernde Stützung nach Abb. 1 zu berücksichtigen ist (Flugzeugholm und Rippe).

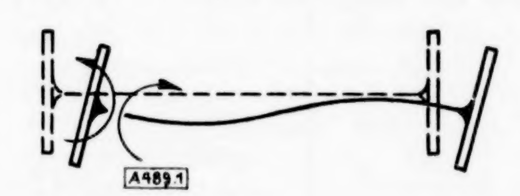


Abb. 1.

Das an sich bekannte Verfahren soll für den Fall des Kragträgers mit zentrisch angreifender Endlast kurz erläutert werden. Die Differentialgleichung lautet [2]:

$$\frac{d^2\Phi}{d\,x^2}+X^2\,x^2\,\Phi=0 \quad \text{mit} \quad X^2=\frac{P^2\,l^4}{A\,C} \quad . \quad . \quad (1)$$

(x ist die dimensionslose Längskoordinate, gezählt vom Angriffsquerschnitte der Endlast P, l bedeutet die Trägerlänge, A die kleinste Biegungssteifigkeit und C die Torsionssteifigkeit des konstanten Trägerquerschnittes). — Die Randbedingungen für das Kippen des Kragträgers sind

$$\Phi(x=1)=0 \ (2a) \quad \text{und} \quad \frac{d\,\Phi}{d\,x}(x=0)=0 \quad . \quad . \quad (2b).$$

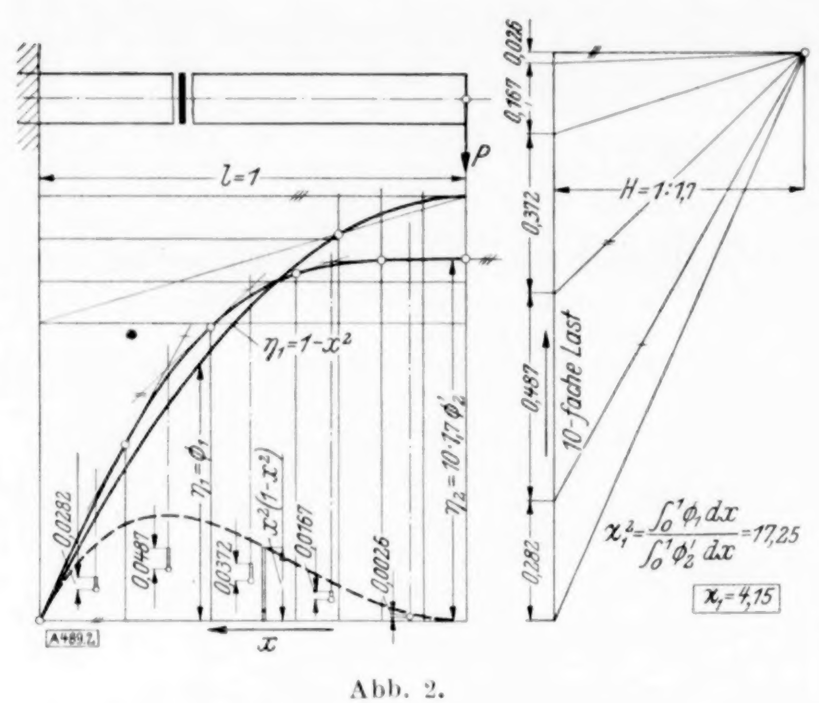


Abb. 2.

Die gewählte erste Annahme für Φ

$$\Phi_1 = 1 - x^2 \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

erfüllt schon die Randbedingungen (2a) und (2b). Als Einheit der Zeichnung (siehe Abb. 2) wurde 100 mm im Original angenommen. Die Ordinaten unter der gestrichelt gezeichneten Kurve entsprechen einer „Belastungsintensität" $x^2 \Phi_1$, welche mit einer Poldistanz $H = 1$ eine im Verhältnis $1 : X^2$ kleinere Verdrehung Φ_2' ergeben würde. Um die Ordinaten des Seilzuges η_2 der Zeichnung in der gleichen Größenordnung wie die der ersten Annahme Φ_1 entsprechenden Ordinaten η_1 zu erhalten und damit weiters in gehöriger Größe gezeichnet werden kann, wurde zweckentsprechend mit 10 facher Last bei 1:1,7facher Poldistanz gearbeitet. Der erste Näherungswert für die Kippziffer ergibt sich nach der endgültigen Formel

$$X_n^2 = \left. \begin{array}{l} \dfrac{\int_0^1 \eta_n \, d x}{\int_0^1 \eta_{n+1} \, d x} \\[2ex] \times \dfrac{\text{Vielfaches der Lastvergrößerung}}{\text{Poldistanz}} \end{array} \right\} . \quad (4)$$

zu

$$X_1 = 4{,}15 \,.$$

Beim zweiten Schritt wird der Verlauf von η_2 zur Berechnung der Belastungsintensität verwendet usf.

In der weiter unten angegebenen Tabelle ist für jeden der betrachteten 6 Fälle das Belastungsschema, die Differentialgleichung und die nach der besprochenen Methode ermittelten Näherungswerte für die Kippziffer angegeben. Als erste Annahme für Φ wurde immer die quadratische Parabel nach Gl. (3) angenommen. Es gelten jeweils die Randbedingungen (2a) und (2b), nur im Falle e) (siehe die Tabelle) ist der von der Einzelstützung gegen Verdrehen an der Stelle $x = 0$ ausgeübte Drall in der Form

$$\frac{d\Phi}{dx}(x = 0) = \frac{c' l^2}{C} \, \frac{1}{3} \, \Phi (x = 0) \,. \quad . \quad . \quad (2c)$$

Tabelle.

Belastungsschema	Differentialgleichung	Näherungswert für X	Erste Annahme für X	Wahrer Wert für X	Fehler in %
a	$\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{P^2 l^4}{AC} x^2 \Phi = 0$	4,15 4,03 4,016	—	4,0126 [2]	3,4 0,42 0,08
b	$\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{P^2 l^4}{AC} (1 - 2x + x^2) \Phi = 0$	1,186 1,174	—	?	—
c	$\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{P^2 l^4}{AC} x^2 \Phi = 0, \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{P^2 l^4}{AC}\left(2x - \dfrac{1}{2}\right) \Phi = 0, \quad \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$	3,54 3,43	—	?	—
d $dM=-c\,\phi_{\bar x}\,dx$	$\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \left(\dfrac{P^2 l^4}{AC} x^2 - \dfrac{c\,l^2}{C}\right) \Phi = 0, \quad \dfrac{c\,l^2}{C} = 2$ . .	5,32 5,20	5,0	5,1082 [3]	4,15 1,8
e $M_{\frac{2}{3}}^{0}=-c'\phi_{\frac{2}{3}}\,l/3$	$\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{P^2 l^4}{AC} x^2 \Phi = 0, \quad \dfrac{c' l^2}{C} = 3$	8,22 7,61 7,35	7,0	?	—
f	$\dfrac{d^2\beta}{du^2} - \dfrac{1}{2-u}\dfrac{d\beta}{du} + \dfrac{P^2 l^2}{A_0 C_0} 4 \dfrac{(1-u)^2}{(2-u)^2} \beta = 0,$ wenn $u = 1 - x,\ \beta = \Phi,\ A' = A_0\left(1 - \dfrac{u}{2}\right)$ ist	3,54 3,41	3,5	3,36 [5]	5,35 1,49

zu berücksichtigen. In den drei letzten Fällen ist auch die dort notwendige erste Annahme für X angegeben, weiters ist in den Fällen a), d) und f) der wahre Wert von X neben dem Fehler der Annäherung eingetragen. —

Sieht man vom Zeichenfehler ab, dann muß dieses Verfahren ebenso konvergieren wie das bei der Herleitung von Näherungswerten für X mit Hilfe der durch die entsprechende Integralgleichung verschärften Näherung für die Eigenfunktion [3] durch den Vergleich der Ordinatenflächen. Für den Fall a) wurde rein rechnerisch $X_1 = 4{,}183$ gefunden. Der Unterschied zwischen diesem und dem auf graphischen Wege gefundenen analogen Wert ist 0,79 %, er ist auf die Ungenauigkeit der Zeichnung zurückzuführen. Beim zweiten Schritt ist dieser Unterschied — 0,34 %. Wie man sieht, ist die Auswirkung des Zeichenfehlers auf die Größe der Kippziffer gegenüber der Abweichung vom wahren Wert für die ersten Schritte nicht bedeutend. Bei einer oftmaligen Wiederholung des Verfahrens könnte es sich wegen des mit jedem Schritt mitgeschleppten Zeichenfehlers von einem gewissen Schritt an wohl herausstellen, daß die Näherungswerte nicht mehr gegen die wahre Kippziffer konvergieren. Diese oftmalige Wiederholung ist aber für technische Zwecke nicht notwendig. Gewöhnlich dürfte bei zweckmäßiger Wahl von Φ_1 (und evtl. X_1) schon nach dem 2. oder 3. Schritt ein brauchbarer Näherungswert für X erreicht sein.

Bei rein rechnerischer fortschreitender Verschärfung von Näherungen für die Eigenfunktion bestimmen sich die Kippziffern am genauesten mit Hilfe der Energiebedingung [4]. So wird z. B. für den Kragträger mit zentrisch angreifender Endlast die wahre Kippziffer $X = 4{,}0126$ durch die Folge 4,183, 4,0157, 4,012607 .... angenähert [3]. Die Benützung der graphisch gefundenen Näherung Φ_n in der Energiegleichung erfordert aber mehr mit Ablese- und Zeichenfehlern behaftete Schritte als die Gewinnung der Kippziffer aus Φ_n und Φ_{n+1} durch Vergleich der Ordinatenflächen. Es bleibt noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen beim graphischen Verfahren die Benützung der Energiegleichung ebenfalls von Vorteil ist.

Schrifttum:

[1] K. Karas: Kritische Drehzahlen stetig mit Masse belegter Wellen mit Längsbelastung und Kreiselwirkung. Ingenieur-Archiv, I. Bd., 1930.

[2] L. Prandtl: Kipperscheinungen. Inaugural-Dissertation München 1899.

[3] Der Verfasser: Über die Kipplasten eines geraden Stabes, der gegen Querschnittsdrehung elastisch gestützt ist. Diss. DTH – Brünn 1933.

[4] S. Timoschenko: Sur la stabilité des systèmes élastiques. Annales des ponts et chaussées. Paris 1913. Fasc. 4.

[5] K. Federhofer: Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe mit veränderlicher Höhe. Abhandl. d. III. intern. Kongresses für techn. Mechanik, Stockholm.

Brünn. Josef Weinhold. 489

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. M. **LAGALLY,** o. Prof. an der Techn. Hochschule Dresden. Mechanik und Thermodynamik des stationären Gletschers. (Sonderdruck aus Ergebnise der kosmischen Physik, Bd. II.) 90 S. m. 13 Fig. Leipzig 1934. Akademische Verlagsges. m. b. H. Preis brosch. 7 RM.

Der Verfasser ist seit über 20 Jahren in der Gletscherforschung tätig; er kennt die Gletschererscheinungen der Alpen von Grund aus und hat sich an der Vermessung der Ostalpengletscher erfolgreich beteiligt. Wiederholt hat er im einschlägigen Schrifttum das Wort ergriffen; zuerst in beschreibender und geschichtlicher Art, später mit der Erörterung mechanischer und wärmekundlicher Aufgaben, aus deren Zusammenfassung das vorliegende Werk hervorgegangen ist. Vor mehr als 40 Jahren hat der Schreiber dieser Zeilen geometrische Ideen in die damals neuaufblühende Gletscherkunde der Ostalpen eingeführt. Es waren Fragen nach dem Zusammenhang der Gletscherschwankungen mit der Witterung, die damals die Aufmerksamkeit der Naturforscher auf die Gletscher lenkten und zur Begriffsbildung des „stationären“ Gletschers führten, dessen ortsfeste Strömung durch die Schwere bei gleichförmiger Schneezufuhr im Firngebiete und Abschmelzung im Zungengebiete unterhalten wird. Nimmt man zu diesem Begriff die Forderung des lückenlosen Zusammenhangs der bewegten Massen und der Stetigkeit der Bewegung hinzu, so ist der Ablauf der Bewegung bei bekannter Gestalt des Gletschers und seines Bettes bereits in recht enge Grenzen gebannt. Aus diesem Ablauf läßt sich eine Fülle teils wohlbekannter, aber auch bis dahin weniger beachteter Gletschererscheinungen herleiten. Diese kinematische Gletscherlehre wird im vorliegenden Werk kurz auseinandergesetzt und dient als Grundlage für weitergehende dynamische und thermodynamische Betrachtungen, die tiefer in die Ursachen des geometrisch erkannten Bewegungsablaufes hineinführen. Von den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit ausgehend, nützt Lagally ein von Somigliana angegebenes Integral, das für die stationäre Bewegung in einem geneigten zylindrischen Bett mit gleichgeneigter ebener freier Oberfläche gilt, nach Möglichkeit aus. In dieses Integral geht außer der Zähigkeitszahl eine Funktion einer komplexen Veränderlichen ein, die entweder durch die Verteilung der Geschwindigkeit über die Oberfläche eines Querschnittes oder durch die Form des Querschnittes selbst bestimmt werden kann und eine Abhängigkeit der oberflächlichen Geschwindigkeitsverteilung von der Querschnittsform vermittelt. So gehört z. B. zu einem halbelliptischen (trogförmigen) Querschnitt eine parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung mit einem Hochwert in der Mitte und annähernd linearem Abfall gegen die Ränder, während bei einem dreieckigen Querschnitt die Geschwindigkeit vom Rand weg, wo sie Null ist, mit dem Quadrat des Abstandes steigt. Kennt man an einem wirklichen stationären Gletscher sowohl die Verteilung der Oberflächengeschwindigkeit als auch die Querschnittsform, so läßt sich die Zähigkeitszahl des Gletschereises bestimmen. Durch die von A. Blümke und H. Heß vor 25 Jahren ausgeführten Tiefbohrungen am Hintereisgletscher im Ötztal und die gleichzeitigen Geschwindigkeitsmessungen an der Gletscheroberfläche sind die Grundlagen für eine solche Bestimmung der Zähigkeitszahl gegeben. Der Wert, den Lagally hierfür auf doppelte Weise findet, ist größer, als er nach Laboratoriumsversuchen zu erwarten war, kann aber mit einigem Vertrauen auf die Ermittlung der Eismächtigkeit und Querschnittsform von Gletschern angewandt werden, von denen nur die Oberflächengeschwindigkeit bekannt ist.

Viel schwieriger ist die Untersuchung der Spaltenbildung der Gletscher. Dazu bedarf es der Kenntnis des Spannungszustandes des bewegten Eises, wenn man von der naheliegenden Voraussetzung ausgeht, daß das Aufreißen der Spalten erfolgt, wenn die Zugspannungen die Festig-

keitsgrenze überschreiten. Lagally vergleicht nun den Spannungszustand in einer zähen Flüssigkeit mit dem in einem elastischen Körper und insbesondere die ähnlichgearteten Beziehungen, die in beiden Fällen zwischen den 6 Spannungskomponenten einerseits und den 6 Komponenten der Deformationsgeschwindigkeiten bzw. der Verzerrung andererseits bestehen. Er betrachtet nun das Gletschereis als einen elastischen Körper, in dem die Schubfestigkeit dauernd überschritten ist und in dem die Winkelverzerrung mit der Zeit weiter anwächst, wobei ein schon von Maxwell gegebener Ansatz für plastische Körper zugrundegelegt wird. Der von der Zeit unabhängige elastische Anteil an der Winkelverzerrung wird durch den elastischen Schubmodul des Eises, die Geschwindigkeit des sich mit der Zeit ändernden Anteils durch die Zähigkeitszahl des fließenden Eises geregelt. Werden Schubmodul und Zähigkeitszahl einander gleichgesetzt, so lassen sich bei geeigneter Wahl des elastischen Dehnungsmoduls die vorhin genannten Beziehungen gleichzeitig erfüllen, und zwar die elastischen für rasch ablaufende Vorgänge (z. B. Wellenbewegungen), die plastischen für langdauernde, bei denen die kleine elastische Formänderung gegenüber der mit der Zeit großen Formänderung des Fließens vernachlässigt werden kann. Es wird so der Schubmodul des Gletschereises aus der Zähigkeitszahl bestimmt. Der Dehnungsmodul kann auf diesem Wege nicht ermittelt werden, da beim Fließen des Gletschers das Eis als unzusammendrückbar vorausgesetzt wird, während das elastische Verhalten eine, wenn auch sehr geringe Zusammendrückbarkeit voraussetzt. Man braucht da neue Versuchsmöglichkeiten, die sich aus der Beobachtung der Ausbreitung von künstlich durch Zerknall von Sprengkörpern erzeugten Wellen ergeben. Es treten dabei Längswellen mit 3580 m und Querwellen mit 1670 m Sekundengeschwindigkeit auf. Aus diesen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten rechnet sich der Dehnungsmodul des Gletschereises im technischen Maß zu 673 kg/mm², der Schubmodul zu 261 kg/mm². Diese Zahlen verdienen als technische Mittelwerte für natürliches Gletschereis im Schmelzzustande mehr Vertrauen als solche, die aus schwierig anzustellenden Laboratoriumsversuchen hervorgegangen sind.

Nunmehr wird der Spannungszustand an der ebenen freien Oberfläche des Somiglianaschen Gletschers betrachtet. Eine Hauptspannung senkrecht zu der freien Oberfläche verschwindet, die beiden anderen liegen in derselben und schließen mit der Strömungsrichtung den Winkel von 45° ein. Das gleiche muß dann auch von den aufreißenden Spalten gelten, die entstehen, wenn eine jener Hauptspannungen eine Zugspannung ist, die die Festigkeit des Eises überschreitet. In der Tat zeigen die Gletscherspalten am Rande durchweg die von der Theorie geforderte Eigentümlichkeit, von diesen weg unter 45° nach oben zu zu verlaufen. Unter Voraussetzung eines trogförmigen Querschnittes sind beim Somiglianaschen Gletscher die Randgebiete Zugspannungsgebiete mit Überschreitung der Zugfestigkeit; es folgen gegen die Mitte zu Gebiete mit geringerer Zugspannung, während in der Mitte selbst in allen 3 Hauptrichtungen Druckspannung und demnach Spaltenfreiheit herrscht. Die Entstehung von Spalten durch Überschreitung der Schubfestigkeit des Eises wird von Lagally praktisch abgelehnt; für die an Gletschern beobachteten Gleitflächen, auf welche Philipp eine neue Bewegungstheorie der Gletscher aufzubauen gesucht hat, werden von ihm auf Gleitbewegungen längs Reißspalten zurückgeführt. Die wohldurchdachten Ausführungen über das Gletscherkorn und den inneren Aufbau des Gletschers seien hier übergangen, dagegen müssen die thermodynamischen Betrachtungen besonders hervorgehoben werden. Sie beginnen mit der Berechnung des Energieumsatzes in einer strömenden zähen Flüssigkeit, deren Bewegung dauernd so langsam ist, daß die lebendige Kraft vernachlässigt werden kann, was für den Gletscher in der Regel zutrifft. Der Energiesatz läßt sich dann so ausdrücken, daß die sekundliche Wärmeentwicklung in einem Raumteilchen des Eises gleich ist der sekundlich geleisteten Fallarbeit, plus der Arbeit des isotropen Druckes, plus der Reibungsarbeit, welch letztere sich aus der Arbeit der resultierenden Reibung und der eigentlichen Formänderungsarbeit zusammensetzt. Für den ganzen Gletscher ist die entwickelte Wärmemenge gleich der Fallarbeit, da wegen der Annahme, daß die Bodengeschwindigkeit Null ist, die beiden anderen Arbeitsanteile im stationären Gletscher sich aufheben; für einzelne Teile des Gletschers dagegen nicht. Das wird sehr anschaulich für den Sonderfall des Somiglianaschen Gletschers gezeigt, dessen Querschnitt ein Rechteck mit langer wagrechter und kurzer senkrechter Seite ist, und in dem die Strömungsgeschwindigkeit parabelförmig von der Oberfläche gegen die Tiefe zu auf Null abnimmt. Hier ist die Fallarbeit an der Oberfläche wegen der starken Geschwindigkeit groß und nimmt nach der Tiefe zu ab, während bei der Wärmeentwicklung das Umgekehrte zutrifft, da die Formänderung nach unten zunimmt.

Hier setzt nun ein von Lagally zum ersten Male besonders betonter Begriff des „kalten" Gletschers ein, dessen Temperatur überall unter der jeweiligen, mit dem Druck abnehmenden Schmelztemperatur des Eises liegt. In einem solchen bildet sich infolge der Wärmeentwicklung im Innern ein Temperaturgefälle gegen die Oberfläche zu aus, wodurch Wärme nach außen durch Leitung abgeführt wird. Außerdem ist noch die Einfuhr von Wärme aus dem Erdinnern am Gletschergrunde zu beachten, sowie jene aus der Außenluft, deren Wärmegrad zwar nicht, wie es für einen stationären Gletscher nötig wäre, gleichbleibend, vielmehr jährlichen und täglichen Schwankungen unterworfen ist. Das thermische Verhalten eines solchen „kalten" Gletschers gleicht dann im ganzen dem eines Felsbodens mit einer verminderten geothermischen Tiefenstufe (20 m auf 1° C). In den Polargegenden ist das Vorkommen solcher kalter Gletscher von mäßiger Gesamtfallhöhe anzunehmen. Da jedoch die Fallarbeit des Eises im Durchschnitt auf je 100 m Fallhöhe die Temperatur des Eises um 0.5° C erhöht, so nähert sich die Innentemperatur des Gletschers beim Abwärtsfließen vom Grunde her, wo Reibungswärme und Erdwärme zusammenwirken, der Schmelztemperatur des Eises unter dem jeweiligen Druck. Es wird dann bei großen Polargletschern wenigstens in der Tiefe der Zustand herrschen, der für die Gletscher der gemäßigten Zonen kennzeichnend ist. Da die Zähigkeit des Eises unterhalb der Schmelztemperatur größer ist, muß bei großen Polargletschern außer dem Sprung im Temperaturgefälle am Grunde der kalten Oberschicht des Gletschers auch ein solcher in der Formänderung des Eises beim Fließen angenommen werden, der aber jenem entgegengesetzt ist. Es ist also in der kalten Oberschicht das Temperaturgefälle groß, gegenüber jenem der schmelzenden Unterschicht, in der es nur in geringem Maße vom Druckanstieg bedingt wird, während in der Oberschicht die Formänderung wegen der größeren Zähigkeit des kalten Eises gering ist gegenüber jener in der Unterschicht mit geringer Zähigkeit.

Das sind nur einige Stichproben aus dem Buche Lagallys, das sehr knapp, aber mit viel Umsicht und genauer Kenntnis des einschlägigen Schrifttums abgefaßt ist, wovon schon das Schriftenverzeichnis mit über hundert Nummern Zeugnis ablegt.

München. Seb. Finsterwalder. 496

D. **HILBERT** und P. **BERNAYS**, Grundlagen der Mathematik. Bd. 1. (Die Grundlagen d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 40.) Berlin 1934, Julius Springer Verlag. XII + 471 S. Preis 36 M.

Insofern das Buch aus dem Rahmen konkreter und anwendbarer mathematischer Forschung herausfällt, ist es für den Praktiker der Mathematik ohne Belang, insofern es sich darin um den Wahrheitswert der Mathematik handelt, hat es für Mathematiker, Physiker und Philosophen, ja für jeden denkenden Menschen gleich hohes Interesse. — Die moderne angebliche Grundlagenkrise ist freilich in weiten Kreisen ihrer vermeintlichen Schwierigkeit und Nutzlosigkeit wegen übel beleumundet. Wer einseitig mitten in mathematischer Forschungsarbeit drinnen steht, neigt leicht zu der beschränkten Meinung, daß hier durch schlecht angebrachten Fleiß ein klarer Tatbestand dunkel, verwirrt und unbrauchbar gemacht wird. In Wahrheit ist das Gegenteil der Fall: die Probleme sind nicht das Erzeugnis mathematischer Überkultur, sondern gehören seit Eudoxos zum ewigen Bestande menschlicher Erkenntnissorgen und treten bei der heutigen Erkenntnislage der Mathematik und Physik zwangsläufig in den Vordergrund. Zwei Schulen stehen heute einander gegenüber, die man durch die Schlagworte Formalismus und Intuitionismus zu bezeichnen pflegt. Während der Intuitionismus — kurz gesagt — nur solche Urteile in der Mathematik und Physik gelten läßt, deren Sinn in der Anschauung vollziehbar ist, und die einen evidenten Tatbestand ausdrücken (Beispiel: „finite“ Mathematik, Zahlentheorie), erträgt der Formalismus so enge Grenzen, die schon in der klassischen Mathematik, z. B. bei Einführung idealer, ohne weiteres nicht in der Anschauung aufweisbarer Elemente überschritten werden, nicht und dehnt die Erkenntnis auf transzendente, unabhängig von unserem Wissen um irgendwelche Phänomene erschaffene Gegenstände aus (Beispiel: die transfiniten Ordnungszahlen der Cantorschen Mengenlehre). Während Tatbestände einander nicht widersprechen und die darauf bezüglichen Theorien zwar menschlichem Irrtum unterworfen, aber grundsätzlich widerspruchsfrei sind, ist für die transzendenten Theorien der Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit zu ihrer sachlichen Rechtfertigung notwendig, haben sich doch bei der uferlosen Mengenbildung an den Grenzen der Mengenlehre Widersprüche ergeben. Der Beweis der Widerspruchslosigkeit wird dadurch geführt, daß das Verfahren eines mathematischen (finiten oder transfiniten) Beweises formalisiert wird und auf Grund der evidenten finiten Mathematik (in dieser Anwendung Metamathematik genannt) gezeigt wird, daß in dem formalisierten Beweisgang aus den Axiomenformeln durch den mathematischen Prozeß niemals die Formel des Widerspruchs entstehen kann, so wie beim Schachspiel aus der Ausgangsstellung nach den Zugregeln niemals eine mehr als neun Damen enthaltende Stellung gewonnen werden kann. Es wird also gleichsam durch eine Art logisches Relais, die Formalisierung, die finite Mathematik zur Begründung der transfiniten benutzt. — Das von Bernays abgefaßte Buch hat als das derzeitige Standardwerk des Formalismus zu gelten. Auf die angedeuteten philosophischen Hintergründe geht es fast nicht ein. Es ist im Gegensatz zu manchen anderen Veröffentlichungen über den Gegenstand lesbar und wohltuend ausführlich geschrieben. Doch wird nur der mit Erfolg es in die Hand nehmen, der eine gewisse Kenntnis der axiomatischen Methode der exakten Wissenschaften hat. Denn der Formalismus ist nichts anderes als die konsequente Vollendung der Axiomatik. Hierauf, sowie auf die Fortschritte näher einzugehen, die das Buch innerhalb der ausgedehnten Disziplin des Formalismus, insbesondere in der Beweistheorie, erzielt, ist an dieser Stelle nicht der Ort. Es seien nur einige Paragraphen-Überschriften angeführt: Das Problem der Widerspruchsfreiheit in der Axiomatik als logisches Entscheidungsproblem; die elementare Zahlentheorie; das finite Schließen und seine Grenzen; die Formalisierung des logischen Schließens in Aussagen- und Prädikatenkalkül: Widerspruchsfreiheit unendlicher Individuenbereiche; die rekursiven Definitionen. — Noch sei hervorgehoben, daß sowenig die Relativitätstheorie etwas mit philosophischem Relativismus zu tun hat, sowenig der Formalismus mit dem sich berührt, was in neuester Zeit von einer journalistischen Einstellung her als toter Formelkram abgewertet wird. Bisweilen sagt man statt Formalismus treffender Symbolismus, da durch Anschauung nicht ohne weiteres adäquat erkennbare Gegenstände durch das Symbol der Formel dargestellt werden.

Dresden. W. Threlfall. 471

A. **HEYTING**, Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Hrsg. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“, III. Bd., 4. Heft.) Berlin 1934, Julius Springer Verlag. XII + 73 S.

Verfasser, der zu den Intuitionisten (vgl. vorstehendes Referat) zählt, gibt einen umfassenden, übersichtlichen enzyklopädischen Bericht über den derzeitigen Stand der Grundlagenfrage. Aus der Einleitung: „In diesem Referat behandle ich die mathematische Grundlagenforschung nach der intuitionistischen und formalistischen Richtung. Es ist offenbar unmöglich, auf diesem Gebiet die philosophischen und die mathematischen Betrachtungen voneinander zu trennen. Im Gegenteil bin ich bei der Begrenzung des Stoffes von der engen Verbindung der Philosophie mit der Mathematik ausgegangen. Nach der philosophischen Seite habe ich mich auf das für das Verständnis der mathematischen Probleme Notwendigste beschränkt; von den mathematischen Problemen behandle ich nur diejenigen, die noch deutlich mit der Antwort auf die Frage „Was ist Mathematik?“ zusammenhängen.“

Dresden. W. Threlfall. 471

Dr.-Ing. KURT **BEYER**, ord. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Die Statik im Eisenbetonbau. Ein Lehr- und Handbuch der Baustatik. Verfaßt im Auftrage des Deutschen Beton-Vereines. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Erster Band. Mit 572 Abbildungen im Text, zahlreichen Tabellen und Rechenvorschriften. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. VIII + 389 S. Preis geb. 32,50 M.

Der erste Band des Handbuchs der Baustatik umfaßt die statisch bestimmten Tragwerke, die Berechnung der Formänderung gerader und gekrümmter Stäbe und die statisch unbestimmten Tragwerke. Der Inhalt ist knapp formuliert und den heutigen Kenntnissen der Statik weitgehend angepaßt. Der reichhaltige Stoff, die vielen Tabellen und Literaturangaben werden das Buch dem rechnenden Ingenieur wertvoll machen[1]).

Wien. J. Ratzersdorfer.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

KARL H. **GROSSMANN**, Zürich, Elemente der elementaren Mechanik. 1. Teil, 99 S. Zürich 1934, Verlag Karl H. Großmann. Preis brosch. 3 Fr.

[1]) Vgl. auch die Besprechung der ersten Auflage, Bd. 8 (1928), S. 153.

Dr. phil. HERMANN **FRICKE,** Oberregierungsrat und Mitgl. des Reichspatentamts, Die im Innern erdähnliche Sonne, eine neue Anschauung von Äther, Schwerkraft und Sonne. 73 S. + 10 Abb. Weimar 1934, Verlag R. Borkmann. Preis brosch. 1,25 M.

Dr. KARL **GEY,** Oberstudiendirektor in Leipzig, und Dr. HORST **TEICHMANN,** Privatdozent a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). (Math.-phys. Bibl. Reihe II, Bd. 11.) 113 S. + 59 Fig., 2 Tafeln. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 3,20 M.

Dr. PH. **LÖTZBEYER,** Oberstudiendirektor in Berlin, Theorie und Praxis der Tafeln und des Tafelrechnens. 61 S. Dresden 1934, Verlag L. Ehlermann. Preis geb. 3,20 M.

KARL **MARBE,** Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und theoretischen Statistik. 177 S. München und Berlin 1934, Verlag C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 8 M.

Dr.-Ing. HUBERT **SCHARDIN,** Berlin, Das Toeplersche Schlierenverfahren. Grundlagen für seine Anwendung und quantitative Auswertung (Forschungsheft 367, Beil. zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausg. B, Bd. 5, Juli/Aug. 1934). 32 S. + 79 Abb., 5 Zahlentaf. Berlin 1934, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 5 M, für VDI-Mitgl. 4,50 M.

NACHRICHTEN

Tafelwerk höherer mathematischer Funktionen.

Zur Zeit wird im Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin im Rahmen der Wissenschaftlichen Akademikerhilfe der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft an der Berechnung von Tafeln höherer mathematischer Funktionen gearbeitet. Es handelt sich, was den Kreis der Beschäftigten anbelangt, um Maßnahmen zur Erhaltung der Arbeitsfähigkeit erwerbsloser Akademiker, denen Gelegenheit geboten werden soll, durch Arbeit auf ihren Fachgebieten ihre Kenntnisse zu erhalten, zu erweitern und dadurch sich das Fortkommen in ihrem eigenen Berufe zu erleichtern. Die Förderungssätze liegen über denen der Arbeitslosen-Unterstützung. Es sind noch Plätze frei. Interessenten können sich im Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin im Zimmer 256 oder Zimmer 88 melden.

Es ist zunächst mit der Polynome der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome und Orthogonalfunktionen begonnen worden. Darüber hinaus sollen Funktionen tabuliert werden, die numerisch näher zu kennen das Bedürfnis besteht, für die aber bisher keine ausreichenden Tafeln vorliegen. Die Leitung dieser Notarbeit, die in Händen des Direktors des genannten Instituts liegt, ist gern bereit, Anregungen und Wünsche in dieser Richtung zu berücksichtigen. A. Klose. 501

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Prager Mitglieder.

Am 25. Oktober 1934 hielt Hr. Ing. Dr. techn. Alfred Eckert einen Vortrag über „Berechnung der Wärmestrahlung in der Heiztechnik".

Am 8. November 1934 sprach Hr. Ing. Dr. techn. Heinrich Treml über den „Anfangszustand bei Gebäudeschwingungen infolge von Erdbeben".

Persönliches.

Prof. Dr. Fr. A. Willers, o. Prof. der Mathematik an der Bergakademie Freiburg (Sachsen), wurde mit dem 1. Oktober 1934 von seinen amtlichen Pflichten entbunden (emeritiert).

Prof. Dr. Wilhelm Müller, bisher Professor an der Deutschen Techn. Hochschule in Prag, hat einen Ruf als o. Prof. der Mechanik an die Techn. Hochschule in Aachen erhalten und angenommen.

Hr. Dr. Fritz Noether, bisher o. Prof. der Mechanik an der Techn. Hochschule Breslau, und Dr. Stefan Bergmann, früher Privatdozent in Berlin, sind in das Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Kujbyscheff-Universität Tomsk (USSR) berufen worden. Sie vertreten dort die Fächer der Funktionentheorie, mathematischen Physik und angewandten Mathematik.

Der n. b. a. o. Prof. Dr. Alfred Klose in Berlin ist beauftragt worden, in der philosophischen Fakultät der Universität Berlin im Wintersemester 1934/35 die bisher von Ministerialdirektor Prof. Dr. Vahlen innegehabte Professur für angewandte Mathematik sowie die Leitung des Instituts vertretungsweise zu übernehmen.

Frau Dr. Hilda Pollaczek-Geiringer, bisher an der Universität Brüssel, früher in Berlin, ist als außerordentlicher Professor (Chargé de cours) an die Universität Istanbul berufen worden.

Hr. Dr. Hans Fromm, früher Privatdozent und seit September 1934 a. o. Prof. an der Techn. Hochschule Berlin, hat einen Ruf auf den Lehrstuhl für Baustoffkunde und Festigkeitslehre an der Techn. Hochschule Danzig unter Ernennung zum o. Professor erhalten und angenommen.

Der von Domherrn, Dr. Dr. Ing. Alfred Ackermann-Teubner, im Jahre 1922 der Universität Leipzig gestiftete „Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften" ist für das Jahr 1934 durch das Preisgericht dem Professor Dr. Dr. ing. E. h. Erich Trefftz an der Technischen Hochschule in Dresden für seine Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Mechanik zuerkannt worden.

Die Universität Brüssel hat bei Gelegenheit ihrer 100-Jahr-Feier Hrn. Prof. Dr. P. Debye, Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Leipzig, und Hrn. Prof. Dr. R. v. Mises, früher in Berlin, jetzt in Istanbul, den Titel eines Dr. h. c. verliehen.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. III. Vj. D.A. 1100.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.